

Matrices de transvection. Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
INT 1990

\mathbb{R} est le corps des réels, n un entier naturel donné, $n \geq 2$. On note \mathcal{M}_n l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et \mathcal{GL}_n le groupe des matrices carrées d'ordre n inversibles. On note I_n la matrice unité de \mathcal{M}_n .

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on définit l'élément $E_{i,j}$ de \mathcal{M}_n comme étant la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i -ième ligne et j -ième colonne valant 1.

On appelle matrice de transvection toute matrice de type $I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \neq j$.

Partie I

- 1°) a. Calculer les produits $E_{i,j}E_{h,k}$ pour $i, j, h, k \in \{1, \dots, n\}$.
 b. Que peut-on dire de la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$?
 c. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, i, j, h, k \in \{1, \dots, n\}$, avec $i \neq j, h \neq k, j \neq h$. Calculer $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})$. En déduire l'inverse de $I_n + \lambda E_{i,j}$.
- 2°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$.
 a. Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.
 b. Etablir un résultat analogue sur les colonnes.
- 3°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ de coefficients $a_{i,j}$. On suppose que la première ligne de A ou sa première colonne possède un élément non nul.
 Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de \mathcal{M}_n , produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients $b_{i,j}$ telle que $b_{1,1} = 1$ et $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$ pour $2 \leq i \leq n$.
 On pourra envisager les cas suivants: i) $a_{1,1} = 1$; ii) $\exists i > 1, a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$; iii) $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1, a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.
- 4°) Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et r son rang, supposé strictement positif.
 Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de \mathcal{M}_n , produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,i}$ telle que
 i) $b_{i,i} = 1$ si $1 \leq i < r$; ii) $b_{i,i} = 0$ si $r < i \leq n$; iii) $b_{r,r} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det A$ si $r = n$.
 Faire une démonstration par récurrence en commençant par le cas où $n = 2$.
- 5°) Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre n de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices de transvection.
- 6°) On suppose dans cette question seulement que $n \geq 3$. Soit $f : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que
 i) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, f(AB) = f(A)f(B)$;
 ii) Pour toute matrice diagonale A , $f(A)$ est égal au produit des coefficients de la diagonale.
 a. Montrer que toute matrice $I_n + aE_{\alpha,\beta}, \alpha \neq \beta$, peut s'écrire sous la forme:
 $I_n + aE_{\alpha,\beta} = (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1}(I_n + \mu E_{h,k})^{-1}$, expression dans laquelle on précisera les valeurs de λ, μ, i, j, h, k , avec $i \neq j, h \neq k$.
 b. Calculer $f(A)$ si A est une matrice de transvection.
 c. Calculer $f(A)$ si A est un élément quelconque de \mathcal{M}_n .

Partie II

Si $M \in \mathcal{M}_n$, on note $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice M .

- 1°) Vérifier que $M \mapsto \text{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur \mathcal{M}_n , telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- 2°) Soit σ une forme linéaire sur \mathcal{M}_n , telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, \sigma(AB) = \sigma(BA)$.
- Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$, calculer $\sigma(E_{i,j})$.
 - Comparer $\sigma(E_{i,i})$ et $\sigma(E_{j,j})$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
 - Montrer: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n, \sigma(M) = \lambda \text{Tr}(M)$.
- 3°) Soit \mathcal{T} le sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n engendré par les matrices de la forme $AB - BA, A, B \in \mathcal{M}_n$, et soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}I_n$. Montrer que $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$. En déduire que $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.
- 4°) Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Calculer pour $i, j, h, k \in \{1, \dots, n\}, h \neq k$, le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.
- 5°) Soit θ une forme linéaire sur \mathcal{M}_n telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n, \forall B \in \mathcal{GL}_n, \theta(AB) = \theta(BA)$. Montrer: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathcal{M}_n, \theta(M) = \lambda \text{Tr}(M)$.

Partie III

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et soit E^* son dual. On note (e_1, \dots, e_n) une base de E , et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa duale.

On note $\mathbf{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E , $\mathcal{GL}(E)$ le groupe de ses automorphismes, Id l'endomorphisme identité.

On appelle automorphisme d'algèbre de $\mathbf{L}(E)$ toute application A , linéaire et bijective de E dans E , qui de plus vérifie: $\forall u, v \in \mathbf{L}(E), A(u \circ v) = A(u) \circ A(v)$.

On note $\mathcal{Aut}(E)$ le groupe (pour la composition des applications) des automorphismes de E .

Soit $g \in \mathcal{GL}(E)$, on définit $A_g : \mathbf{L}(E) \rightarrow \mathbf{L}(E), u \mapsto A_g(u) = g \circ u \circ g^{-1}$. On dit que A_g est l'automorphisme intérieur défini par g .

- 1°) Montrer que l'application $\chi : g \mapsto A_g$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{GL}(E)$ vers $\mathcal{Aut}(E)$. Cette application χ est-elle injective?
- 2°) a. Soit $g \in \mathbf{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, (x, g(x))$ est une famille liée. Montrer que g est une homothétie.
b. En déduire le noyau de χ .
- 3°) Pour $(\varphi, x) \in E^* \times E$, on définit une application $u_{\varphi, x} : E \rightarrow E, y \mapsto \varphi(y)x$.
- Montrer que $u_{\varphi, x}$ est un endomorphisme de E , préciser son image et son noyau.
 - à quelle condition nécessaire et suffisante sur (φ, x) $u_{\varphi, x}$ est-il un projecteur non nul?
- 4°) Dans la suite, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on notera $u_{i,j}$ l'application $u_{e_j^*, e_i}$.
- Pour $i, j, h, k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.
 - Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$?
- 5°) Soit \mathcal{P} l'ensemble des projecteurs non nuls de E .
- Démontrer que la relation \leq définie sur \mathcal{P} par:
 $\forall p, q \in \mathcal{P}, (p \leq q) \iff (p = p \circ q = q \circ p)$
est une relation d'ordre sur \mathcal{P} . Est-ce une relation d'ordre totale?
 - On appelle élément minimal de \mathcal{P} pour \leq tout élément $p \in \mathcal{P}$ tel que: $\forall q \in \mathcal{P}, q \leq p \Rightarrow q = p$.
Etablir l'équivalence des énoncés suivants:
 - p est un projecteur de rang 1.
 - p est un projecteur minimal de \mathcal{P} pour la relation \leq .
 - $\exists (\varphi, x) \in E^* \times E$ tel que $p = u_{\varphi, x}$ et $\varphi(x) = 1$.
- 6°) Soit A un automorphisme de l'algèbre $\mathbf{L}(E)$.
- Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$?

b. Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$ est un élément minimal pour \leq ?

c. En déduire l'existence d'une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs de E , et une famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de formes linéaires sur E , telles que:

i) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \varphi_i(\varepsilon_i) = 1$; ii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, A(u_{i,i}) = u_{\varphi_i, \varepsilon_i}$.

d. Calculer $\varphi_i(\varepsilon_j)$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Que peut-on en déduire pour les familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$?

7°) Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

a. Pour $k \in \{1, \dots, n\}, k \neq j$, calculer $A(u_{i,j}) \circ u_{\varphi_k, \varepsilon_k}$.

En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.

b. Calculer $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,j})$.

c. Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\varphi_j, \varepsilon_i}$.

8°) **a.** Montrer que pour $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_{i,j} \lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.

b. En déduire: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \lambda_{i,j} = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.

9°) **a.** Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de E , dont la base duale est notée $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$, telle que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$.

b. Montrer qu'il existe un élément $g \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.

c. Conclure.

10°) Quelles sont toutes les formes linéaires φ sur $L(E)$ telles que, pour tout $A \in \mathcal{Aut}(E)$, on ait: $\forall u \in L(E), \varphi(A(u)) = \varphi(u)$?



PARTIE I (Rem : partie entièrement recopiée sur EITPE, 1987)

① (a) $E_{ij} \cdot E_{hk} = \delta_{jh} E_{ik}$: fait en classe.

(b) $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base de M_n (= base canonique). Si $A = (a_{ij}) \in M_n$,
 A s'écrit dans cette base: $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} E_{ij}$

(c) Si $i \neq j$, $\det(I_n + \lambda E_{ij}) = 1$ (car $I_n + \lambda E_{ij}$ est triangulaire avec des "1" sur la diagonale)

(d) Avec $i \neq j, h \neq k, j \neq h$, on a: $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk}) = I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda \mu \underbrace{\delta_{jh} E_{ik}}_{=0}$
 $= I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk}$

On en déduit: $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) = I_n$

donc $I_n + \lambda E_{ij}$ est inversible d'inverse $I_n - \lambda E_{ij}$.

② (a) Soit $i \neq j$ et $A = \sum_{h,k} a_{hk} E_{hk}$. Alors $(I_n + \lambda E_{ij})A = A + \lambda E_{ij}A$
 avec $\lambda E_{ij}A = \lambda \sum_{h,k} a_{hk} E_{ij}E_{hk} = \lambda \sum_{h,k} a_{hk} \delta_{jh} E_{ik} = \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} E_{ik}$

Or $\sum_{k=1}^n a_{jk} E_{ik}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de la i -ième ligne, qui sont ceux de la j -ième ligne de A.

Ainsi, $(I_n + \lambda E_{ij})A$ est la matrice obtenue à partir de A par l'op: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

(b) On trouve de même que la matrice $A(I_n + \lambda E_{ij})$ est celle obtenue à partir de A par l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

(on peut faire un calcul semblable, on utilise: ${}^t(A \cdot (I_n + \lambda E_{ij})) = {}^t(I_n + \lambda E_{ij}) {}^t A = (I_n + \lambda E_{ji}) {}^t A$

et se ramener ainsi au cas précédent)

③ 1^{er} cas: $a_{11} = 1$: les opérations $L_i \leftarrow L_i - a_{i1} L_1$ ($2 \leq i \leq n$) et $C_j \leftarrow C_j - a_{1j} C_1$ ($2 \leq j \leq n$) transforment A en une matrice B de la forme $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, $B = PAQ$ où $P = \prod_{i=2}^n (I_n + a_{i1} E_{i1})$ et $Q = \prod_{j=2}^n (I_n + a_{1j} E_{1j})$ ce qui donne le résultat.

2^e cas: Il existe $i > 1$ tel que $a_{i1} \neq 0$

Alors, l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1-a_{11}}{a_{12}} L_1$ transforme A en une matrice A' du type précédent. Ainsi, $B = PAQ$, où $P = \prod_{i=2}^n (I_n + a_{i2} E_{i2}) (I_n + \frac{1-a_{11}}{a_{12}} E_{12})$ et $Q = \prod_{j=2}^n (I_n + a'_{1j} E_{1j})$, sera du type voulu.

3^e cas : Il existe $j \geq 2$ tel que $a_{1j} \neq 0$

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \frac{1-a_{11}}{a_{1j}} C_j$ nous ramène là encore au 1^{er} cas, et on conclut comme ci-dessus.

4^e cas : $a_{11} \neq 1$ et $\forall i \geq 2, a_{i1} = 0$ et $\forall j \geq 2, a_{1j} = 0$

L'opération (par exemple) $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ (mult. à gauche par $I_n + E_{21}$) nous ramène au 2^e cas, ce qui achève la démonstration.

- ④ • Supposer $r \neq 0$ revient simplement à supposer : $A \neq 0$
- Remarquons également que la multiplication à droite ou à gauche d'une matrice A par une matrice de transvection, donne une matrice A' telle que $\det A' = \det A$ (car le det. d'une matrice de transvection vaut 1)

• Cas $n=2$

- si la 1^{ère} ligne ou la 1^{ère} colonne de A n'est pas nulle, la question précédente donne : $\exists P, Q$, produits de matrices de transvection d'ordre 2, tq $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = B$ et $\det B = \det A = b$. Cela donne le résultat (le cas $r=1$ correspondent au cas $b=0$)
- sinon, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ nous ramène au cas précédent (car $A \neq 0$)

• Supposons le résultat démontré à l'ordre $n-1 \geq 2$, et soit $A \in M_n, \text{rg } A = r \geq 1$.

* Si la 1^{ère} ligne ou la 1^{ère} colonne de A n'est pas nulle, il existe P, Q, produits de matrices de transvection d'ordre n, tq $PAQ = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B' & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

avec $\text{rg } B = \text{rg } A = r$ et $\det B = \det B' = \det A$.

On a : $B' \in M_{n-1}$, et $\text{rg } B' = r-1$.

- si $\text{rg } B' = 0$, i.e. si $r=1$, on a directement le résultat voulu.

- sinon, l'H.R permet d'affirmer qu'il existe P_1, Q_1 , produit de matrices de transvection d'ordre $n-1$, telles que $P_1 B' Q_1 = B_1$ avec :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ si } \text{rg } B_1 < n-1 \text{ et } B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \det B_1 \end{pmatrix} \text{ si } \text{rg } B_1 = n-1$$

(et $\det B_1 = \det B' = \det A$)

En notant $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, on vérifie alors facilement,

en effectuant le produit par blocs :

$$P' A Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_1 B' Q_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

soit: $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$ si $\text{rg } B_1 = n-1$ soit $\text{rg } A = n$ et $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_0 \end{pmatrix}$ si non. (3)

On obtient alors le résultat à l'ordre n , en remarquant que si P_1 et Q_1 sont des produits de matrices de transvection d'ordre $n-1$, P' et Q' sont encore des produits de matrices de transvection d'ordre n .

(car, si T est une matrice de transvection d'ordre $n-1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$ est une matrice de transvection d'ordre n).

* Le cas où la i^{e} ligne et la i^{e} colonne de A sont nulles se ramène au cas précédent, à l'aide de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ où L_i est une ligne non nulle de A (il en existe car $A \neq 0$). CQFD.

(5) D'après ce qui précède, si A est une matrice carrée de déterminant ± 1 (leu ens. forme bien un sous-gpe de $GL_n(\mathbb{R})$, noté $SL_n(\mathbb{R})$), il existe P, Q , produit de matrices de transvection telles que $I_n = PAQ$ soit $A = P^{-1}Q^{-1}$.

P^{-1}, Q^{-1} étant elles aussi des produits de matrices de transvection, A est donc produit de matrices de transvection.

i.e. $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection.

(6) (a) Calculons $A = (I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}(I_n + \mu E_{hk})^{-1}$ en supp. $i \neq j$ et $h \neq k$

$$\begin{aligned} A &= (I + \lambda E_{ij})(I + \mu E_{hk})(I - \lambda E_{ij})(I - \mu E_{hk}) \\ &= (I + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu \delta_{jh} E_{ik})(I - \lambda E_{ij} - \mu E_{hk} + \lambda\mu \delta_{jh} E_{ik}) \\ &= I + \cancel{\lambda E_{ij}} + \cancel{\mu E_{hk}} + \lambda\mu \delta_{jh} E_{ik} - \cancel{\lambda E_{ij}} - \cancel{\lambda^2 E_{ij}^2} - \cancel{\lambda\mu \delta_{ch} E_{hj}} - \cancel{\lambda^2 \mu \delta_{jh} \delta_{ck} E_{ij}} \\ &\quad - \cancel{\mu E_{hk}} - \cancel{\lambda\mu \delta_{jh} E_{ik}} - \underbrace{\mu^2 E_{hk}^2}_{=0} - \lambda\mu^2 \delta_{jh} \delta_{kh} E_{ik} + \lambda\mu \delta_{jh} E_{ik} \\ &\quad + \lambda^2 \mu \delta_{jh} \delta_{ji} E_{ik} + \lambda\mu^2 \delta_{jh} \delta_{ch} E_{hk} + \lambda^2 \mu^2 \delta_{jh} \delta_{jh} \delta_{ck} E_{ik} \\ &= I + \lambda\mu \delta_{jh} E_{ik} - \lambda\mu \delta_{ch} E_{hj} - \lambda^2 \mu \delta_{jh} \delta_{ch} E_{ij} + \lambda\mu^2 \delta_{jh} \delta_{ch} E_{hk} + \lambda^2 \mu^2 \delta_{jh} \delta_{ch} E_{ik} \end{aligned}$$

En supposant $i \neq h$, on a: $A = I_n + \lambda\mu \delta_{jh} E_{ik}$

puis, pour $h=j$: $A = I_n + \lambda\mu E_{ik}$

[il est possible de trouver $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tq $i \neq j$, $i \neq k$ et $j \neq k$ car $n \geq 3$]

Il suffit donc ensuite de choisir $i = \alpha$, $k = \beta$ et $\lambda\mu = a$ pour obtenir $A = I_n + a E_{\alpha\beta}$

(b) Soit $A = I + a E_{\alpha\beta}$ avec $\alpha \neq \beta$ une matrice de transvection, et i, j, h, k, λ, μ comme ci-dessus. On a alors:

$$f(A) = f(I + \lambda E_{ij}) f(I + \mu E_{hk}) f((I + \lambda E_{ij})^{-1}) f((I + \mu E_{hk})^{-1})$$

$$\det f(A) = f(I + \lambda E_{ij}) f((I + \lambda E_{ij})^{-1}) f(I + \rho E_{hk}) f((I + \rho E_{hk})^{-1})$$

$$= f[(I + \lambda E_{ij})(I + \lambda E_{ij})^{-1}] f[(I + \rho E_{hk})(I + \rho E_{hk})^{-1}] = f(I_n) \cdot f(I_n)$$

④

Or $f(I_n) = 1$ d'où $f(A) = 1$.

⑤ Soit $A \in \text{GL}_n$. Alors, il existe P, Q , produits de matrices de transvection, telles que $B = PAQ$ soit diagonale, de la forme décrite à la question 4.

On a alors $f(B) = \det A$ et $f(P) = f(Q) = 1$

(car, si $P = \prod T_i$, on a $f(P) = \prod f(T_i) \dots$) d'où : $f(A) = \det A$.

(Une jolie caractérisation du déterminant, isn't it?)

PARTIE II

① cf. cours (à redémontrer lors du concours)

② Soit $i \neq j$. $\sigma(E_{ij} E_{ii}) = \sigma(0) = 0$ car σ linéaire

d'où $0 = \sigma(E_{ii} E_{ij}) = \sigma(E_{ij})$: si $i \neq j$, $\sigma(E_{ij}) = 0$

③ $\sigma(E_{ij} E_{ji}) = \sigma(E_{ji} E_{ij})$ d'où $\sigma(E_{ii}) = \sigma(E_{jj})$ pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

④ Notons λ la valeur commune des $\sigma(E_{ii})$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $M \in \text{M}_n$,

$M = \sum_{i,j} m_{ij} E_{ij}$. σ étant linéaire : $\sigma(M) = \sum_{i,j} m_{ij} \sigma(E_{ij}) = \sum_i m_{ii} \sigma(E_{ii})$

soit $\sigma(M) = \lambda \text{tr}(M)$

⑤ . Soit $A, B \in \text{M}_n$, on a $\text{tr}(AB - BA) = 0$ donc $\forall M \in \mathcal{I}$, $\text{tr}(M) = 0$ (car M est combinaison linéaire de matrices de la forme $AB - BA$, et tr est une forme linéaire)

En notant $\mathcal{I}' = \{M \in \text{M}_n, \text{tr}(M) = 0\}$, on a donc $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$. De plus, $\dim \mathcal{I}' = n^2 - 1$ puisque \mathcal{I}' est un hyperplan de M_n (noyau d'une f.l. non nulle).

donc : $\dim \mathcal{I} \leq n^2 - 1$.

• D'autre part : si $i \neq j$: $E_{ij} = E_{ii} E_{ij} - E_{ij} E_{ii} \in \mathcal{I}$

si $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ $E_{11} - E_{ii} = E_{1i} E_{i1} - E_{i1} E_{1i} \in \mathcal{I}$

donc \mathcal{I} contient, en particulier, les $n^2 - 1$ matrices $(E_{ij})_{i \neq j}$ et $(E_{11} - E_{ii})_{i \geq 2}$.

Ces matrices étant linéairement indépendantes (facile), il en résulte : $\dim \mathcal{I} \geq n^2 - 1$.

Enfin : $\dim \mathcal{I} = n^2 - 1$

(et on a aussi démontré : $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$)

• Puisque $I_n \notin \mathcal{I} = \mathcal{I}'$, la droite vectorielle engendrée par I_n est bien un supplémentaire de \mathcal{I} , soit $\text{M}_n = \mathcal{I} \oplus \mathbb{K} I_n$.

④ $F_{hk}^{-1} F_{ij} F_{hk} = I_n + E_{ij} - \delta_{ih} \delta_{jk} E_{hj} + \delta_{jh} \delta_{ik} E_{kh} - \delta_{ih} \delta_{jk} E_{hk}$ (calcul semblable à celui de I.6.a)

⑤ On a alors:

⑤

$$\theta(F_{hk}^{-1} F_{ij} F_{hk}) = \theta(F_{ij} F_{hk} (F_{hk})^{-1}) = \theta(F_{ij}). \text{ d'autre part:}$$

$$\theta(F_{ij}) = \theta(F_{ij}) - \delta_{ck} \theta(E_{hj}) + \delta_{jh} \theta(E_{ck}) - \delta_{ck} \delta_{jh} \theta(E_{hk})$$

$$\text{soit } \delta_{jh} \theta(E_{ck}) - \delta_{ck} \theta(E_{hj}) - \delta_{ck} \delta_{jh} \theta(E_{hk}) = 0$$

- pour $i=j=h$ et $i \neq k$, on obtient: $\theta(E_{kk}) = 0$

- pour $i=k, j=h$ et $c \neq j$, on obtient: $\theta(E_{cc}) - \theta(E_{jj}) = \theta(E_{hk}) = 0$

$$\text{soit } \theta(E_{cc}) = \theta(E_{jj})$$

Le résultat cherché en découle, exactement comme dans la question n°2.

PARTIE III

① * On vérifie d'abord facilement que: A_g est linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, et que $A_g(\text{Id}_E) = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$.

$A_g(u \circ v) = A_g(u) \circ A_g(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. D'autre part, si $g \in GL(E)$, on a:

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), A_g \circ A_{g^{-1}}(u) = g \circ (g^{-1} \circ u \circ g) \circ g^{-1} = u = \text{Id}_E(u)$$

d'où $A_g \circ A_{g^{-1}} = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi, A_g est bijective; c'est donc bien un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$

* Montrons que χ est un morphisme du groupe $(GL(E), \circ)$ dans le groupe $(\text{Aut}(\mathcal{L}(E)), \circ)$

$$\text{i.e. } \forall g, g' \in GL(E), A_g \circ A_{g'} = A_{g \circ g'}. \text{ On:}$$

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad A_g \circ A_{g'}(u) = g \circ (g' \circ u \circ g'^{-1}) \circ g^{-1}$$

$$\text{et } A_{g \circ g'}(u) = g \circ g' \circ u \circ (g \circ g')^{-1} = g \circ g' \circ u \circ g'^{-1} \circ g^{-1}, \text{ d'où l'égalité.}$$

* χ n'est pas injective: voir question 2.b.

② a) Exercice déjà fait en classe.

b) Le noyau de χ est: $\text{Ker } \chi = \chi^{-1}(\text{Id}_{\mathcal{L}(E)})$

$$\text{soit } \text{Ker } \chi = \{g \in GL(E) \text{ tq } A_g = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}\}$$

$$= \{g \in GL(E) \text{ tq } \forall u \in \mathcal{L}(E), g \circ u \circ g^{-1} = u\}$$

$$= \{g \in GL(E) \text{ tq } \quad \quad \quad g \circ u = u \circ g\}$$

Soit $g \in \text{Ker } \chi, x \in E - \{0\}$, H un hyperplan supplémentaire de $\mathbb{R}x$ et u la symétrie p.r. à $\mathbb{R}x$, de direction H . On a $g \circ u = u \circ g$, d'où $g[u(x)] = u[g(x)]$
soit $g(x) = u[g(x)]$

$g(x)$ est donc invariant par u , i.e. $g(x) \in \mathbb{R}x$: $\{x, g(x)\}$ est lié (ce résultat demeurant d'ailleurs vrai si $x=0$). On en déduit que g est une homothétie.

Réciproquement, il est facile de vérifier que si g est une homothétie ($g = \lambda \text{Id}_E$),

alors $\chi(g) = 0$.

Ainsi, $\text{Ker } \chi = \{ \lambda \text{Id}_E, \lambda \neq 0 \}$ ($\lambda \neq 0$ car sinon, $\lambda \text{Id}_E \notin \text{GL}(E)$)

Puisque $\text{Ker } \chi$ n'est pas réduit à $\{ \text{Id}_E \}$, χ n'est pas injective.

(6)

(3) (a) • $u_{\varphi, x} \in \mathcal{L}(E)$: facile.

• - si $x = 0$: $u_{\varphi, 0}$ est l'application nulle

- si $x \neq 0$: $\text{Ker } u_{\varphi, x} = \{ y \in E, \varphi(y)x = 0 \} = \{ y \in E, \varphi(y) = 0 \} = \text{Ker } \varphi$.

• - si $\varphi = 0_{E \rightarrow \mathbb{R}}$: $\text{Im } u_{0, x} = \{ 0 \}$

- si $\varphi \neq 0_{E \rightarrow \mathbb{R}}$, φ est surjective de E sur \mathbb{R} donc $\text{Im } u_{\varphi, x} = \text{Vect}(\{ x \})$

(b) - le cas $x = 0$ est exclu par l'énoncé; on suppose donc $x \neq 0$

- $u_{\varphi, x}$ projecteur $\Leftrightarrow u_{\varphi, x} \circ u_{\varphi, x} = u_{\varphi, x}$

$$\Leftrightarrow \forall y \in E \quad u_{\varphi, x} [\varphi(y)x] = \varphi(y)x$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(y) u_{\varphi, x}(x) = \varphi(y)x$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(y) \varphi(x)x = \varphi(y)x$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(y) \varphi(x) = \varphi(y) \text{ car } x \neq 0.$$

si φ est la forme linéaire nulle, $u_{\varphi, x} = 0$: ce cas est exclu.

Donc, il existe $y \in E$ tq $\varphi(y) \neq 0$, et les conditions précédentes s'écrivent: $\varphi(x) = 1$.

Ainsi: $u_{\varphi, x}$ projecteur non nul $\Leftrightarrow \varphi(x) = 1$ (car, si $\varphi(x) = 1$, on ne peut pas avoir $x = 0$ ou $\varphi = 0$)

(4) • On remarque que: $\forall x \in E \quad u_{e_j^*, e_i}(x) = e_j^*(x) e_i$

$$\text{donc } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_{e_j^*, e_i}(e_k) = \delta_{jk} e_i$$

Ainsi, la matrice de u_{ij} dans la base (e_1, \dots, e_n) est E_{ij}

• Il en résulte immédiatement:

$$\begin{cases} - u_{ij} \circ u_{hk} = \delta_{jh} u_{ik} \\ - (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ base de } \mathcal{L}(E) \end{cases}$$

(5) (a) • \leq est réflexive car: $\forall p \in \mathcal{P}, p = p^2$ d'où $p \leq p$

• \leq est antisymétrique car: si $p, q \in \mathcal{P}, p \leq q \text{ et } q \leq p \Rightarrow \begin{cases} p = p \circ q = q \circ p \\ q = q \circ p = p \circ q \end{cases} \Rightarrow p = q$.

• \leq est transitive car: si $p, q, r \in \mathcal{P}$ sont tels que $p \leq q$ et $q \leq r$, on a:

$$p = p \circ q = q \circ p \quad \text{et} \quad q = q \circ r = r \circ q$$

$$\text{d'où } p = p \circ q = p \circ (q \circ r) = (p \circ q) \circ r = p \circ r$$

$$\text{et } p = q \circ p = (r \circ q) \circ p = r \circ (q \circ p) = r \circ p$$

$$\text{d'où } p \leq r$$

Ainsi: \leq est bien une relation d'ordre sur \mathcal{P} .

(E)

• Soit F un sev de E de dimension ≥ 1 et G un sev de E de dimension ≥ 1 tels que $E = F \oplus G$ (c'est possible car $n \geq 2$). Soit p la projection sur F de direction G et q la projection sur G de direction F .

On a alors $poq = qop = 0$. On ne peut donc avoir ni $p \leq q$, ni $q \leq p$.

Ainsi, \leq est une relation d'ordre partiel.

(b) i) \Rightarrow ii) Soit p un projecteur de rang 1, et $q \in \mathcal{P}$ tel que $q \leq p$, i.e. $q = qop = poq$.

- si $x \in \text{Ker } p$, $p(x) = 0$ d'où $q(x) = q[p(x)] = q(0) = 0$

- soit $\{a\}$ une base de $\text{Im } p$ ($\text{rg } p = 1$). $q(a) = p[q(a)]$, donc $q(a) \in \text{Im } p$,

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $q(a) = \lambda a$. On a alors: $\forall x \in \text{Im } p$, $q(x) = \lambda x = \lambda p(x)$

- Ainsi, q et λp coïncident sur $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$, supplémentaires. On a donc $q = \lambda p$. Mais alors, l'égalité $q = poq = qop$ donne $\lambda p = \lambda^2 p$ soit $\lambda = 1$ (car les cas $\lambda = 0, p = 0$ sont exclus).

d'où finalement $q = p$: p est minimal.

ii) \Rightarrow i) Soit p un élément minimal de \mathcal{P} , et $r = \text{rg}(p)$ ($r \geq 1$ car $p \neq 0$).

Soit (x_1, \dots, x_n) une base de E telle que (x_1, \dots, x_r) soit une base de $\text{Im } p$ et (x_{r+1}, \dots, x_n) une base de $\text{Ker } p$ (c'est possible car $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$).

Soit alors q la projection sur $\mathbb{R}x_1$ de direction $\text{Vect}(\{x_2, \dots, x_n\})$.

Alors: - $poq(x_1) = p(x_1) = x_1$ et $qop(x_1) = q(x_1) = x_1$,

- $\forall i \in \llbracket 2, r \rrbracket$ $poq(x_i) = p(0) = 0$ et $qop(x_i) = q(x_i) = 0$

- $\forall i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$ $poq(x_i) = p(0) = 0$ et $qop(x_i) = q(0) = 0$.

Donc $q = qop = poq$, soit $q \leq p$. p étant minimal, on a $q = p$, d'où $\text{Im } p = \text{Im } q = \mathbb{R}x_1$

et p est de rang 1.

iii) \Rightarrow i) découle directement de la question n°3

i) \Rightarrow iii) Soit p un projecteur de rang 1, et $\{x\}$ une base de $\text{Im } p$.

Alors, pour $\forall y \in E$, $\exists \lambda_y \in \mathbb{R}$ tq $p(y) = \lambda_y \cdot x$

Il est facile de vérifier que l'application $y \mapsto \lambda_y$ est linéaire: notons alors $\lambda_y = \varphi(y)$, avec $\varphi \in E^*$.

On aura donc bien: $\forall y \in E$, $p(y) = \varphi(y) \cdot x$, et $q(x) = 1$ (car $p(x) = x$)

(6) (a) Soit $p \in \mathcal{P}$, alors $A(p) \circ A(p) = A(poq)$ et $A(p)$ est non nul car A est un automorphisme donc $A(p) \in \mathcal{P}$.

⑥ - On remarque d'abord que, si $p, q \in \mathcal{P}$:

$$p \leq q \Rightarrow p = p \circ q = q \circ p \Rightarrow A(p) = A(p) \circ A(q) = A(q) \circ A(p) \\ \Rightarrow A(p) \leq A(q)$$

- Supposons p minimal, et soit $q \leq A(p)$. Alors $A^{-1}(q) \leq p$ (d'après ce qui précède, puisque A est aussi un automorphisme d'algèbre), d'où $A^{-1}(q) = p$, soit $q = A(p)$.

Ainsi, $A(p)$ est minimal.

⑦ Les applications u_i sont des projecteurs de rang 1, donc des e -éléments minimaux de \mathcal{P} . D'après ce qui précède, $A(u_i)$ est aussi un e -élément minimal de \mathcal{P} , donc, d'après 5, il existe $\varphi_i, \varepsilon_i \in E^* \times E$ tels que: $A(u_i) = u_{\varphi_i, \varepsilon_i}$ et $\varphi_i(\varepsilon_i) = 1$ pour tout i .

⑧ • Si $i \neq j$, on a $u_i \circ u_j = 0$ d'où $A(u_i \circ u_j) = A(u_i) \circ A(u_j) = 0$

$$\text{Ainsi: } u_{\varphi_i, \varepsilon_i} \circ u_{\varphi_j, \varepsilon_j} = 0 \text{ d'où } u_{\varphi_i, \varepsilon_i} [u_{\varphi_j, \varepsilon_j}(\varepsilon_j)] = 0$$

$$u_{\varphi_i, \varepsilon_i} [\varepsilon_j] = 0$$

$$\text{soit } \varphi_i(\varepsilon_j) \cdot \varepsilon_i = 0 \text{ d'où } \varphi_i(\varepsilon_j) = 0.$$

$$\text{Ainsi: } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}.$$

• On en déduit que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est liève car:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j = 0 \Rightarrow \forall i, \varphi_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j \right) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i, \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0$$

Donc $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E , et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ en est la base duale.

⑨ ① • $A(u_j) \circ u_{\varphi_k, \varepsilon_k} = A(u_j) \circ A(u_k) = A(u_j \circ u_k) = A(0) = 0$ (car $k \neq j$)

$$\text{• On a donc } \forall k \neq j, A(u_j) [u_{\varphi_k, \varepsilon_k}(\varepsilon_k)] = 0 \text{ soit } A(u_j)(\varepsilon_k) = 0.$$

On en déduit: $\text{Vect}(\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n\}) \subset \text{Ker } A(u_j)$, donc $\dim \text{Ker } A(u_j) \geq n-1$.

Mais $A(u_j)$ n'est pas nul (car A automorphisme), donc $\dim \text{Ker } A(u_j) \leq n-1$.

Enfin, $\dim \text{Ker } A(u_j) = n-1$, $\text{rg } A(u_j) = 1$

$$\text{et } \text{Ker } A(u_j) = \text{Vect}(\{\varepsilon_k, k \neq j\})$$

② $A(u_j) \circ A(u_i) = A(u_i)$

$$\text{Donc } A(u_j) [A(u_i)(\varepsilon_i)] = A(u_i)(\varepsilon_i) = \varepsilon_i.$$

Par suite, $\varepsilon_i \in \text{Im } A(u_j)$ et, puisque $\text{rg } A(u_j) = 1$: $\text{Im } A(u_j) = \text{Vect}(\{\varepsilon_i\})$

③ On a: $A(u_j)(\varepsilon_j) \in \text{Im } A(u_j)$. Donc $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}$ tq $A(u_j)(\varepsilon_j) = \lambda_j \varepsilon_i$

$$\text{soit } A(u_j)(\varepsilon_j) = \lambda_j \varphi_i(\varepsilon_j) \varepsilon_i = \lambda_j u_{\varphi_i, \varepsilon_i}(\varepsilon_j)$$

D'autre part, si $k \neq j$: $A(u_{ij})(\varepsilon_k) = 0$ et $\lambda_{ij} u_{\varphi_j, \varepsilon_i}(\varepsilon_k) = \lambda_{ij} \underbrace{\varphi_j(\varepsilon_k)}_{=0} \varepsilon_i = 0$ (9)

Donc $A(u_{ij}) = \lambda_{ij} u_{\varphi_j, \varepsilon_i}$ (car ces deux endo. coïncident sur la base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$)
 et $\lambda_{ij} \neq 0$ car $A(u_{ij}) \neq 0$ (A automorphisme)

(8) (a) $A(u_{ij}) \circ A(u_{jk}) = A(u_{ij} \circ u_{jk}) = A(u_{ik})$

soit $\lambda_{ij} \lambda_{jk} u_{\varphi_j, \varepsilon_i} \circ u_{\varphi_k, \varepsilon_j} = \lambda_{ik} u_{\varphi_k, \varepsilon_i}$

En appliquant cette égalité à ε_k , puisque $u_{\varphi_k, \varepsilon_i}(\varepsilon_k) = \varphi_k(\varepsilon_k) \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_i$ etc...

on trouve: $\lambda_{ij} \lambda_{jk} = \lambda_{ik}$

(b) D'où immédiatement: $\lambda_{ij} = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{j1}}$ puisque $\lambda_{j1} \neq 0$.

(9) (a) On a: $\forall x \in E, A(u_{ij})(x) = \lambda_{ij} u_{\varphi_j, \varepsilon_i}(x) = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{j1}} \varphi_j(x) \varepsilon_i$.

Notons alors $\alpha_i = \lambda_{i1} \varepsilon_i$. $\frac{1}{\lambda_{j1}} \varphi_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$, donc $\alpha_j^* = \frac{1}{\lambda_{j1}} \varphi_j$

et on a alors: $A(u_{ij}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$ ((α_i) est bien une base car $\lambda_{i1} \neq 0$)

(b) Notons g l'automorphisme de E tel que $g(\varepsilon_i) = \alpha_i$ pour tout i

Alors: $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A(u_{ij})(\alpha_k) = \alpha_j^*(\alpha_k) \alpha_i = \delta_{jk} \alpha_i$

et $g \circ u_{ij} \circ g^{-1}(\alpha_k) = g \circ u_{ij}(\varepsilon_k) = g[u_{\varphi_j, \varepsilon_i}(\varepsilon_k)]$

$= g[e_j^*(\varepsilon_k) \varepsilon_i] = \delta_{jk} g(\varepsilon_i) = \delta_{jk} \alpha_i$

Ainsi: $A(u_{ij}) = g \circ u_{ij} \circ g^{-1}$ (car coïncident sur la base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$)

(c) Puisque $(u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$, on en déduit $A = A_g$

i.e.: $\exists g \in GL(E)$ tq $\forall u \in \mathcal{L}(E), A(u) = g \circ u \circ g^{-1}$.

Autrement dit: tous les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ sont des automorphismes intérieurs

ou encore: l'application $\chi: g \mapsto A_g$ est surjective de $GL(E)$ sur $\text{Aut}(\mathcal{L}(E))$

(10) D'après la question précédente, il faut déterminer les $\varphi \in \mathcal{L}(E)^*$ telles que:

$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall g \in GL(E), \varphi(g \circ u \circ g^{-1}) = \varphi(u)$

Or, pour $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, pour $\forall g \in GL(E)$, il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u g^{-1} = v$,
 soit $u = v g$. Ce qui précède équivaut donc à:

$\forall v \in \mathcal{L}(E), \forall g \in GL(E) \varphi(g \circ v) = \varphi(v \circ g)$

D'après la question II.5: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = \lambda \text{tr}(u)$