RÉSEAU IBNGHAZI
MP* 1 : Rabat

DM : EVN

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Les Classiques : Connexité Par Arcs

Connexité par arcs Enoncés

Exercice 47
Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe.

Exercice 48
Montrer que l'union de deux connexes non disjoints est connexe.

Exercice 49
Montrer que l'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Exercice 50
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives et l'on souhaite établir que f' s'annule.
a) Etablir que $A = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$ est une partie connexe par arcs de I^2.
b) On note $\delta : A \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\delta(x, y) = f(y) - f(x)$. Etablir que $0 \in \delta(A)$.
c) Conclure en exploitant le théorème de Rolle

Exercice 51
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue. Montrer que f est strictement monotone.
Indice : on peut considérer $\varphi(x, y) = f(x) - f(y)$ défini sur
$X = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$.

Exercice 52
Soient A et B deux parties connexes par arcs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
b) En déduire que $A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

Exercice 53
Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A \cup B$ et $A \cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

Exercice 54
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 2$
Montrer que la sphère unité $S = \{x \in E/\ \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs.

Exercice 55
Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension $n \geqslant 2$.
a) Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ?
b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n - 2$. L'ensemble $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 56
Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonalisables est connexe par arcs.

Exercice 57
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 58
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 59
[Théorème de Darboux]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $U = \{(x, y) \in I^2/x < y\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
b) On note $\tau : U \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\tau(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Justifier

$$\tau(U) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

c) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Corrigé

Exercice 39 :
Si u est continue alors

$$A = \{x \in E / \|u(x)\| = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $f = \| \,.\, \| \circ u$. La partie A est donc un fermé relatif à E, c'est donc une partie fermée.
Inversement, si u n'est pas continu alors l'application u n'est par bornée sur $\{x \in E / \|x\| = 1\}$. Cela permet de construire une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \|u(x_n)\| > n$$

En posant

$$y_n = \frac{1}{\|u(x_n)\|} x_n$$

on obtient une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant $y_n \to 0$.
Or $0 \notin A$ donc la partie A n'est pas fermée.

Exercice 44 :
On note U l'ensemble des polynômes considérés.
Soit $P \in U$. En notant $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, on peut écrire

$$P = \lambda(X - x_1) \ldots (X - x_n)$$

avec $\lambda \neq 0$. Pour fixer les idées, supposons $\lambda > 0$ (il est facile d'adapter la démonstration qui suit au cas $\lambda < 0$)
Posons $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.
Posons aussi $y_0 \in \left]-\infty, x_1\right[$ et $y_n \in \left]x_n, +\infty\right[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}$,..., $P(y_{n-1})$ est du signe de (-1), $P(y_n)$ du signe de $+1$.
Considérons maintenant l'application

$$f_i : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i)$$

L'application f_i est continue et donc $f_i^{-1}(\pm\mathbb{R}^{+\star})$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons V l'intersection des

$$f_0^{-1}\left((-1)^n \mathbb{R}^{+\star}\right), f_1^{-1}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+\star}\right), \ldots, f_n^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$$

Les éléments de V sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $V \subset U$. Or $P \in V$ et V est ouvert donc V est voisinage de P puis U est voisinage de P.
Au final U est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.

Exercice 47 :
Le plan privé d'une boule est connexe. Les points exclus étant en nombre fini sont tous inclus dans une même boule et il suffit de transiter par l'extérieur de celle-ci pour conclure.

Exercice 48 :
Si les deux points à relier figurent dans un même connexe, le problème est résolu, sinon on transite par un point commun au deux connexes pour former un arc reliant ces deux points et inclus dans l'union.

Exercice 49 :
L'image d'un arc continu par une application continue est un arc continu. Ainsi si X est connexe et f continue définie sur X alors pour tout $f(x), f(y) \in f(X)$, l'image par f d'un arc continu reliant x et à y est un arc continue reliant $f(x)$ à $f(y)$ et donc $f(X)$ est connexe.

Exercice 50 :
a) A est une partie convexe donc connexe par arcs.
b) L'application δ est continue donc $\delta(A)$ est connexe par arcs c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Puisque f' prend des valeurs strictement positives et strictement négative, la fonction f n'est pas monotone et par conséquent des valeurs positives et négatives appartiennent à l'intervalle $\delta(A)$. Par conséquent $0 \in \delta(A)$.
c) Puisque $0 \in \delta(A)$, il existe $a < b \in I$ tels que $f(a) = f(b)$. On applique le théorème de Rolle sur $[a, b]$ avant de conclure.

Exercice 51 :
X est une partie connexe par arcs (car convexe) et φ est continue donc $\varphi(X)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle.
De plus $0 \notin \varphi(X)$ donc $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^{-\star}$ et on peut conclure.

Exercice 52 :
a) Soient $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$. Par la connexité de A et B, il existe $\varphi : [0,1] \to A$ et $\psi : [0,1] \to B$ continues vérifiant $\varphi(0) = a, \varphi(1) = a'$ et $\psi(0) = b, \psi(1) = b'$. L'application $\theta : [0,1] \to A \times B$ définie par $\theta(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ est continue et vérifie $\theta(0) = (a, b)$ et $\theta(1) = (a', b')$. Ainsi $A \times B$ est connexe par arcs.
b) $A + B$ est l'image de $A \times B$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ vers E, $A + B$ est donc connexe par arcs.

Exercice 53 :
Il nous suffit d'étudier A. Soient $a, a' \in A$. $A \subset A \cup B$ donc il existe $\varphi : [0,1] \to A \cup B$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a'$. Si φ ne prend pas de valeurs dans B alors φ reste dans A et résout notre problème. Sinon posons $t_0 = \inf \{t \in [0,1] / \varphi(t) \in B\}$ et $t_1 = \sup \{t \in [0,1] / \varphi(t) \in B\}$. φ étant continue et A, B fermés, $\varphi(t_0), \varphi(t_1) \in A \cap B$. $A \cap B$ étant connexe par arcs, il existe $\psi : [t_0, t_1] \to A \cap B$ continue tel que $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ et $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. En considérant $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0, t_1]$ et $\theta(t) = \varphi(t)$ sinon, on a $\theta : [0,1] \to A$ continue et $\theta(0) = a$, $\theta(1) = a'$. Ainsi A est connexe par arcs.

Exercice 54 :
Soient $a, b \in S$.
Si $a \neq -b$. On peut alors affirmer que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)a + \lambda b \neq 0$.
L'application $\lambda \mapsto \frac{1}{\|(1-\lambda)a+\lambda b\|}((1-\lambda)a + \lambda b)$ est alors un chemin joignant a à b inscrit dans S.
Si $a = -b$, on transite par un point $c \neq a, b$ ce qui est possible car $n \geqslant 2$.

Exercice 55 :
a) Non. Si on introduit f forme linéaire non nulle telle que $H = \ker f$, f est continue et $f(E \backslash H) = \mathbb{R}^\star$ non connexe par arcs donc $E \backslash H$ ne peut l'être.
b) Oui. Introduisons une base de F notée $(e_1, \ldots, e_p)$ que l'on complète en une base de E de la forme $(e_1, \ldots, e_n)$.
Sans peine tout élément $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ de $E \backslash F$ peut être lié par un chemin continue dans $E \backslash F$ au vecteur e_n si $x_n > 0$ ou au vecteur $-e_n$ si $x_n < 0$ (prendre $x(t) = (1-t)x_1 e_1 + \cdots + (1-t)x_{n-1}e_n + ((1-t)x_n + t)e_n$).
De plus, les vecteurs e_n et $-e_n$ peuvent être reliés par un chemin continue dans $E \backslash F$ en prenant $x(t) = (1-2t)e_n + (1-t^2)e_{n-1}$. Ainsi $E \backslash F$ est connexe par arcs.

Exercice 56 :
Notons $\mathcal{D}_n$ la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étudiée et montrons que toute matrice de $\mathcal{D}_n$ peut-être reliée par un chemin continu inscrit dans $\mathcal{D}_n$ à la matrice I_n ce qui suffit pour pouvoir conclure.
Soit $A \in \mathcal{D}_n$. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale.
Considérons alors $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\gamma(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = (1-t)D + tI_n$.
L'application γ est continue, à valeurs dans $\mathcal{D}_n$ avec $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = I_n$: elle résout notre problème.

Exercice 57 :
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue et l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par celle-ci est $\mathbb{R}^\star$ qui n'est pas connexe par arcs donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne peut l'être.

Exercice 58 :
Pour montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, il suffit d'observer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être relier continûment dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à la matrice I_n.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP = (b_{i,j})$ soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
Nous allons construire un chemin continue joignant I_n à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puis en déduire un chemin joignant I_n à A lui aussi dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Pour $i > j$, posons $m_{i,j}(t) = 0$.
Pour $i < j$, posons $m_{i,j}(t) = tb_{i,j}$ de sorte que $m_{i,j}(0) = 0$ et $m_{i,j}(1) = b_{i,j}$.
Pour $i = j$, on peut écrire $b_{i,i} = \rho_i \mathrm{e}^{i\theta_i}$ avec $\rho_i \neq 0$. Posons $m_{i,i}(t) = \rho_i^t \mathrm{e}^{it\theta_i}$ de sorte que $m_{i,i}(0) = 1$, $m_{i,i}(1) = b_{i,i}$ et

$$\forall t \in [0,1],\ m_{i,i}(t) \neq 0$$

L'application $t \mapsto M(t) = (m_{i,j}(t))$ est continue, elle joint I_n à B et ses valeurs prises sont des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux non nuls, ce sont donc des matrices inversibles.
En considérant $t \mapsto PM(t)P^{-1}$, on dispose d'un chemin continu joignant I_n à A et restant inscrit dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
On peut donc conclure que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 59 :
a) La partie U est convexe donc connexe par arcs.
b) Par le théorème des accroissements finis, un taux de variation est un nombre dérivé et donc

$$\tau(U) \subset f'(I)$$

De plus, tout nombre dérivé est limite d'un taux de variation, donc

$$f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

c) Puisque l'application τ est continue sur U connexe par arcs, son image $\tau(U)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. L'encadrement précédent assure alors aussi que $f'(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.