CPGE RÉSEAU IBNGHAZI

MP* 1 (Rabat)

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Devoir Maison (EVN)

Distance à un convexe

établira (dans $\mathbb{R}^4$) le théorème du point fixe de Brouwer et quelques unes de ses conséquences.

On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $(\ |\ )$ et $\|\ \|$, donc si $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ on a : $(x|y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|=(x|x)^{1/2}$. Si X est une partie de $\mathbb{R}^n$ on notera $\overset{\circ}{X}$ son intérieur, soit $f:X\to\mathbb{R}^n$ on dira que $u\in X$ est un point fixe de f si $f(u)=u$; si $i\in\{1,\dots,n\}$, f_i désigne la composante de rang i de f, donc : $f(x)=(f_1(x),\dots,f_i(x),\dots,f_n(x))$.

I. Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

1. Démontrer que si $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$, on a : $|(x|y)|\le\|x\|\,\|y\|$ (inégalité de Schwarz). Montrer que $|(x|y)|=\|x\|\,\|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires. Montrer que si $\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}^n$ vérifie : $b\neq c$ et $\|a-b\|=\|a-c\|$, on a alors : $\left\|a-\frac{b+c}{2}\right\|<\|a-b\|$.

2. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x\in\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $u\in F$ tel que : $\|x-u\|\le\|x-y\|$ pour tout $y\in F$ (on supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général).

3. Soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, il existe un unique $u\in A$ tel que $\|x-u\|\le\|x-y\|$ pour tout $y\in A$.

Ceci établit le théorème de la projection sur les convexes de $\mathbb{R}^n$: soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique application, notée P, de $\mathbb{R}^n$ dans A qui vérifie : $\|x-P(x)\|=\min\{\|x-y\|: y\in A\}$, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. $P(x)$ s'appelle la projection de x sur A.

4. Montrer que s'il existe $\alpha\in A$ tel que : $(x-\alpha|y-\alpha)\le 0$ pour tout $y\in A$, on a : $\alpha=P(x)$

5. Supposons qu'il existe $y\in A$ tel que : $(x-P(x)|y-P(x))>0$. Soit alors $\mathcal{S}:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par : $\mathcal{S}(t)=\|(x-P(x))-t(y-P(x))\|^2$. Montrer qu'il existe $t\in]0,1[$ tel que : $\mathcal{S}(t)<\|x-P(x)\|^2$.

6. Déduire de **4.** et **5.** que $u=P(x)$ si et seulement si : $u\in A$ et $(x-u|y-u)\le 0$ pour tout $y\in A$.

7. Soit $\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n$ montrer que : $(x-y|P(x)-P(y))\ge\|P(x)-P(y)\|^2$. En déduire que P vérifie les propriétés suivantes : P est continue, $P(\mathbb{R}^n)=A$, $P(x)=x$ si $x\in A$.

La question 7 n'est pas à traiter

CCP 2001. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.
I.Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

En se plaçant dans le plan on peut faire des figures pour voir ce qui se passe.
1.Inégalité de Schwarz et cas d'égalité : question de cours classique.
Soit (a, b, c) vérifiant les conditions de l'énoncé.(figure 1 dans le plan).On note $i = \frac{a+b}{2}$: la médiane du triangle est aussi hauteur :

$$\langle b-c, a-i\rangle = \left\langle b-c, \frac{2a-b-c}{2}\right\rangle = \left\langle (b-a)+(a-c), \frac{(a-b)+(a-c)}{2}\right\rangle = \frac{\|a-c\|^2 - \|a-b\|^2}{2}$$

On peut alors appliquer Pythagore :

$$\|a-b\|^2 = \|(a-i)+(i-b)\|^2 = \left\|(a-i)+(\frac{c-b}{2})\right\|^2 = \|a-i\|^2 + \frac{\|c-b\|^2}{4}$$

$$\boxed{\|a-b\|^2 > \|a-i\|^2}$$

On peut aussi utiliser la formule générale qui donne la longueur de la médiane en fonction des côtés (TD 21 exo 9)
2.Dans le cas où F est borné , F est un compact non vide . Or la fonction $k->\|x-k\|$ est continue sur le compact F à valeur dans $\mathbb{R}$. L'image est donc un compact de $\mathbb{R}$ qui contient son plus petit élément :

$$\exists u \in F, \forall k \in F, \|x-u\| \leq \|x-k\|$$

Dans le cas général ,(figure 2) l'ensemble des distance $\{\|x-y\|, y \in F\}$ est un sous ensemble non vide minoré par 0 de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne inférieure d . On applique l'étude précédente au compact : $F \cap B'(x, d+1)$ qui est non vide car par définition de la borne inférieure $\exists y \in F, d \leq \|x-y\| < d+1$.

$$\exists u \in F \cap B'(x, d+1), \forall k \in F \cap B'(x, d+1), \|x-u\| \leq \|x-k\|$$

Si $\|x-u\| > d$, $\forall y \in F$ $\|x-y\| \geq \|x-u\|$ donc $\inf\{\|x-y\|, y \in F\} \geq \|x-u\|$ absurde car c'est d .

$$\boxed{\exists u \in F, \forall k \in F, \|x-u\| \leq \|x-k\|}$$

$$\boxed{\text{La distance d'un point à un fermé est atteinte.}}$$

3.Soit désormais A un convexe fermé et deux points u_1 et u_2 de A en lesquels la distance de x à A est atteinte. Si $u_1 \neq u_2$, on a d'après **1.**, $\|x-m\| < \|x-u_1\| = (x, A)$ avec $m = \frac{u_1+u_2}{2}$ le milieu . Or si A et convexe le milieu de $[u_1, u_2]$ est dans A .Il existe un point m de A strictement plus près de x que le point rendant la distance minimum ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{La distance à un convexe fermé est atteinte en un unique point.}}$$

4.Soit α vérifiant les conditions de l'énoncé et soit y quelconque de A. Le sujet veut dire que l'angle $\widehat{x\alpha y}$ est toujours droit ou obtus.(figure 3)
$\|x-y\|^2 = \|x-\alpha\|^2 + \|y-\alpha\|^2 - 2\langle x-\alpha, y-\alpha\rangle \geq \|x-\alpha\|^2$ donc α réalise le minimum et $\alpha = P(x)$.
5.Supposons qu'il existe $y \in A$ vérifiant les conditions de l'énoncé (ce qui assure $y \neq P(x)$) et soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = P(x) + t(y - P(x))$. On remarque que $y(t)$ décrit la droite passant par $P(x)$ et de vecteur directeur $(y - P(x))$.$(figure 4)$
On a $S(t) = \|x - y(t)\|^2$.
Par ailleurs $S(t) = \|x-P(x)\|^2 - 2\langle x-P(x), y-P(x)\rangle t + \|y-P(x)\|^2 t^2$ est un trinôme du second degré en t . donc atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en $t_0 = \frac{\langle x-P(x), y-P(x)\rangle}{\|y-P(x)\|^2}$strictement positif .
Donc $S(t_0) < S(0) = \|x-P(x)\|^2$.
Or $S(1) = \|x-y\|^2 > \|x-P(x)\|^2$ puisque $y \neq P(x)$ i.e. $S(1) > S(0)$.
Ainsi $t_0 \in]0,1[$ donc $y(t_0) \in A$ (car A est convexe) et $\|x-y(t_0)\|^2 = S(t_0) < S(0) = \|x-P(x)\|^2$ ce qui est contradictoire avec la définition de $P(x)$ qui rend minimum la distance.
En conclusion il n'existe aucun élément y de A tel que $\langle x-P(x), y-P(x)\rangle > 0$.
6.Simple résumé des deux questions précédente :(figure 3 de nouveau)

$$\boxed{\text{La projection } P(x) \text{ de } x \text{ sur un convexe fermé de } \mathbb{R}^n \text{ est caractérisée par } \langle x-P(x), y-P(x)\rangle \leq 0 \text{ pour tout } y \in A.}$$

7Puisque $P(y) \in A$, on a $\langle x-P(x), P(y)-P(x)\rangle \leq 0$ et de même comme $P(x) \in A$ $\langle y-P(y), P(x)-P(y)\rangle \leq 0$.
En ajoutant les inégalités :$\langle (x-P(x)) - (y-P(y)), P(y)-P(x)\rangle \leq 0$.
Soit $\langle x-y, P(x)-P(y)\rangle - \langle P(x)-P(y), P(y)-P(x)\rangle \leq 0$

$$\boxed{\langle x-y, P(x)-P(y)\rangle \geq \langle P(x)-P(y), P(x)-P(y)\rangle}$$

.
Si $P(x) \neq P(y)$ il en découle par l'inégalité de Schwarz que $\|P(x)-P(y)\| \leq \|x-y\|$. Ce qui est encore vrai si $P(x) = P(y)$. Ainsi

$$\boxed{P \text{ est lipschitzienne de rapport 1 donc continue}}$$

Naturellement $P(x) = x$ si $x \in A$ donc $P(A) = A$ et a fortiori $\boxed{P(\mathbb{R}^n) = A}$.