My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison (EVN)

Distance à un hyperplan

Partie II

H est un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, h une forme linéaire non nulle sur E dont le noyau est égal à H.

1) Dans cette question E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E.

a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$$

b) Montrer qu'il existe une suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de H.

c) En déduire qu'il existe b appartenant à l'hyperplan H tel que :

$$d(x_0, H) = \|x_0 - b\|$$

On dit alors que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en b.

2) On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.

a) Montrer que, si h est une forme linéaire continue sur E, alors le noyau, $\ker(h)$, est fermé dans E.

b) Montrer que, si le noyau de h est fermé, alors h est continue.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

c) Montrer que, si H est un hyperplan de E, alors l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E.

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense dans E.

Partie III

On suppose dans cette partie que E est un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien) $(\,|\,)$, et que H est un hyperplan dense dans E.

1) Déterminer $H^\perp$, l'orthogonal de H.
Rappel : $H^\perp = \left\{x \in E \;/\; \forall y \in H \;\; \left(x \,\middle|\, y\right) = 0\right\}$

2) Que dire de $H \oplus H^\perp$?

3) Pour tout vecteur x de E, calculer la distance $d(x, H)$.

4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte ? Justifier.

Partie IV

On suppose, dans cette partie, que H est un hyperplan fermé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h, continue, non nulle sur E. x_0 désigne un vecteur fixé de E.

1) On considère $\mathscr{L}_c(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues définies sur E.
Sur cet espace vectoriel on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} |||\ |||: & \mathscr{L}_c(E,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \end{array}$$

Montrer que cette application est correctement définie et définie une norme sur $\mathscr{L}_c(E,\mathbb{R})$.
On appelle cette norme, norme subordonnée à $\|\ \|$.

2) **a)** Montrer que, pour tout $y \in H$ on a :

$$\|x_0 - y\| \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

b) En déduire que la distance de x_0 à H est supérieure ou égale à $\dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.

d) On considère dans cette question $x \notin H$.

i) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$|||h||| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

ii) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel λ_n non nul et un vecteur y_n de H tel que $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

iii) Prouver que, pour tout entier n :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$$

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E, on a

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

3) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que, si u est un élément de E avec $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
h est l'application définie sur E dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

a) Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

b) Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E et que $|||h||| \leqslant 1$.

c) Soit $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p. On définit v_p par :

$$\begin{cases} v_p(n) = 1 \text{ si } 0 \leqslant n \leqslant p \\ v_p(n) = 0 \text{ si } n > p \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $|||h|||$.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que : $|||h||| = \dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$

e) On note H le noyau de h, vérifier que H est un hyperplan fermé de E.

f) Montrer que la distance d'un vecteur x de E à l'hyperplan H n'est pas toujours atteinte.

Partie II

H est un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, h une forme linéaire non nulle sur E dont le noyau est égal à H.

1) Dans cette question E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E.

a) On note $d\,(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d\,(x_0, H)$$

Correction : Par caractérisation de la borne inférieure, $\forall\varepsilon > 0,\ \exists y \in H,\quad d(x_0, H) \leq \|x_0 - y\| < d(x_0, H) + \varepsilon$. On applique ceci à $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note y_n un des $y \in H$ vérifiant l'inégalité. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in H \quad \text{ et } \quad d(x_0, H) \leq \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{n+1}$$

donc $\boxed{\text{il existe une suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ y_n \in H \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)}$.

b) Montrer qu'il existe une suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de H.

Correction : On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \|y_n\| = \|y_n - x_0 + x_0\| \leq \|y_n - x_0\| + \|x_0\|$ et la suite $\left(\|x_0 - y_n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle converge donc la suite $\left(\|y_n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne alors l'existence d'une suite $(y_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E. Mais, quand E est de dimension finie, tous ses sous-espaces vectoriels sont fermés donc H est fermé. Comme $\forall p \in \mathbb{N},\ y_{\varphi(p)} \in H$, on a $z_0 = \lim_{p\to+\infty} y_{\varphi(p)} \in H$. D'autre part, la suite $\left(\|x_0 - y_{\varphi(p)}\|\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $\left(\|x_0 - y_n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $d(x_0, H)$ donc elle converge vers la même limite. Enfin, par continuité de la norme, $\|x_0 - y_{\varphi(p)}\| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|x_0 - z_0\|$ et donc, par unicité de la limite, $\|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)$.
En conclusion, $\boxed{\exists z_0 \in H,\ \|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)}$.

c) En déduire qu'il existe b appartenant à l'hyperplan H tel que :

$$d\,(x_0, H) = \|x_0 - b\|$$

On dit alors que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en b.

Correction : cf plus haut avec $b = z_0$.

2) On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.

a) Montrer que, si h est une forme linéaire continue sur E, alors le noyau, $\ker(h)$, est fermé dans E.

Correction : Par définition, $\ker(h) = h^{-1}\big(\{0\}\big)$ et le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Or l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé donc $\boxed{\text{si } h \text{ est continue alors } \ker(h) \text{ est fermé dans } E}$.

b) Montrer que, si le noyau de h est fermé, alors h est continue.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Correction : Supposons que la forme linéaire h ne soit pas continue, on a $\text{non}\Big(\exists K \geq 0,\ \forall x \in E,\ |h(x)| \leq K\,\|x\|\Big)$ soit $\forall K \geq 0,\ \exists x \in E,\ |h(x)| > K\,\|x\|$.

Appliquons ceci à $K = n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et notons x_n un $x \in E$ vérifiant la propriété : on a donc $|h(x_n)| > (n+1)\,\|x_n\|$. Ceci montre que $h(x_n) \neq 0$, on peut donc poser $t_n = \frac{x_n}{h(x_n)}$. On a alors $h(t_n) = \frac{h(x_n)}{h(x_n)} = 1$ et $\|t_n\| = \frac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} < \frac{1}{n+1}$ donc $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n - t_0 \in H$ et $t_n - t_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -t_0$ donc, puisque H est fermé, $-t_0 \in H$.

Mais ceci est faux car $h(-t_0) = -h(t_0) = -1$.

L'hypothèse de départ était donc fausse et on a bien $\boxed{\text{si } \ker(h) \text{ est fermé dans } E \text{ alors } h \text{ est continue}}$.

c) Montrer que, si H est un hyperplan de E, alors l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E.

Correction : $\overline{H} \supset H$ donc $\overline{H} \neq 0$ et si $(x, y) \in \overline{H}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la caractérisation séquentielle de l'adhérence donne l'existence de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ (x_n, y_n) \in H^2,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ et alors , par linéarité de la limite, $x + \lambda y = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + \lambda y_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n + \lambda y_n \in H$ et donc $x + \lambda y \in \overline{H}$. Donc $\boxed{\overline{H} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense dans E.

Correction : Puisque $H \subset \overline{H}$, on a soit $H = \overline{H}$ et, dans ce cas, H est fermé, soit $H \underset{\neq}{\subset} \overline{H}$. Si $H \underset{\neq}{\subset} \overline{H}$, prenons $a \in \overline{H} \setminus H$ et soit $x \in E$ quelconque. On a $h(a) \neq 0$ puisque $a \notin H$ et on peut donc écrire $x = \frac{h(x)}{h(a)}a + \left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right)$ avec $a \in \overline{H}$ et $h\left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right) = h(x) - \frac{h(x)}{h(a)}h(a) = 0$ donc $\left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right) \in H \subset \overline{H}$. Puisque $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $x \in \overline{H}$ ce qui donne $E \subset \overline{H}$.

On peut donc conclure : $\boxed{H \text{ est fermé ou dense}}$.

Partie III

On suppose dans cette partie que E est un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien) $(\ |\ )$, et que H est un hyperplan dense dans E.

1) Déterminer $H^\perp$, l'orthogonal de H.

Rappel : $H^\perp = \big\{x \in E \ /\ \forall y \in H\ \ (x \mid y) = 0\big\}$

Correction : Soit $x \in H^\perp$. Par densité de H dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (x \mid x_n) = 0$. Mais, par continuité du produit scalaire, $(x \mid x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x \mid x)$ donc $(x \mid x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Réciproquement $0_E \in H^\perp$ donc $\boxed{H^\perp = \{0_E\}}$

2) Que dire de $H \oplus H^\perp$?

Correction : $H \oplus H^\perp = H \oplus \{0_E\}$ donc $\boxed{H \oplus H^\perp = H}$.

3) Pour tout vecteur x de E, calculer la distance $d\,(x, H)$.

Correction : Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in H$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. On a, par définition, $0 \leq d(x, H) \leq \|x - x_n\|$ car $x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = 0$ donc $\boxed{\forall x \in E,\ d(x, H) = 0}$.

4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte ? Justifier.
Correction : Si $d(x,H)$ est atteinte, il existe $z_0 \in H$ tel que $0 = d(x,H) = \|x - z_0\|$ donc $x = z_0$ et $x \in H$. La réciproque est claire donc $\boxed{d(x,H) \text{ n'est atteinte que si } x \in H}$.

Partie IV

On suppose, dans cette partie, que H est un hyperplan fermé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h, continue, non nulle sur E. x_0 désigne un vecteur fixé de E.

1) On considère $\mathscr{L}_c(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues définies sur E.
Sur cet espace vectoriel on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} ||| \ ||| : & \mathscr{L}_c(E,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \end{array}$$

Montrer que cette application est correctement définie et définie une norme sur $\mathscr{L}_c(E, \mathbb{R})$.
On appelle cette norme, norme subordonnée à $\| \ \|$.
Correction : *En ayant écouté en cours on peut faire facilement cette question.*

2) a) Montrer que, pour tout $y \in H$ on a :

$$\|x_0 - y\| \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

Correction : On a $\forall x \in E,\ |h(x)| \leq |||h|||\,, \|x\|$ donc, pour $x = x_0 - y$, $|h(x_0)| \leq |||h|||\,\|x_0 - y\|$.
Or $|||h||| \neq 0$ car h est non nulle donc $\boxed{\forall y \in H,\ \|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}}$.

b) En déduire que la distance de x_0 à H est supérieure ou égale à $\dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.
Correction : La borne inférieure étant le plus grand des minorants, $d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.
Correction : Si $d(x_0,H) = 0$, l'inégalité ci-dessus donne $h(x_0) = 0$ donc $x_0 \in H$. La réciproque est immédiate donc $\boxed{d(x_0,H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H}$.

d) On considère dans cette question $x \notin H$.

i) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$|||h||| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

Correction :
Par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists w \neq 0_E,\quad |||h||| \geq \frac{|h(w)|}{\|w\|} > |||h||| - \varepsilon$.
On applique ceci à $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note w_n un de ces $w \neq 0_E$. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ |||h||| - \frac{1}{n+1} < \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq |||h|||$ donc

$$\boxed{\text{il existe } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in E \setminus \{0_E\} \text{ et } |||h||| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}}$$

ii) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel λ_n non nul et un vecteur y_n de H tel que $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.
Correction : $\diamond$ Puisque $x_0 \notin H$, on peut écrire tout $x \in E$ sous la forme $x = \frac{h(x)}{h(x_0)}x_0 + \left(x - \frac{h(x)}{h(x_0)}x_0\right) = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in H$ (vérification immédiate). Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists(\lambda_n, y_n) \in \mathbb{R} \times H,\ w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

$\diamond$ Erreur d'énoncé : la condition $\lambda_n \neq 0$ n'est, en général, pas vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit, par exemple, de choisir $w_0 \in H$ pour avoir $\lambda_0 = 0$ car l'écriture ci-dessus est unique puisque la somme $\mathbb{R}.x_0 \oplus H$ est directe. On ne modifie pas la valeur de la limite de $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$ en modifiant la valeur de w_0 (ou d'un nombre fini de termes) donc [α] est toujours vérifié.

$\diamond$ Par contre, on a $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \lambda_n \neq 0$ car $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |||h||| > 0$ donc $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} > 0$ donc $\forall n \geq n_0,\ h(w_n) \neq 0$ et donc $\lambda_n = \frac{h(w_n)}{h(x_0)} \neq 0$.

iii) Prouver que, pour tout entier n :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$$

Correction : D'une part, $|h(w_n)| = |\lambda_n h(x_0) + y_n| = |\lambda_n|\,|h(x_0)|$ et, d'autre part, $\forall n \geq n_0,\ \|w_n\| = |\lambda_n| \left\|x_0 - \frac{-y_n}{\lambda_n}\right\| \geq |\lambda_n|\, d(x_0, H)$ car $\frac{-y_n}{\lambda_n} \in H$. Donc, puisque $\|w_n\| \neq 0$, $|\lambda_n| \neq 0$ pour $n \geq n_0$ et $d(x_0, H) \neq 0$ pour $x_0 \notin H$, on a

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \frac{|\lambda_n|\,|h(x_0)|}{\|w_n\|} \leq \frac{\lambda_n|\,|h(x_0)|}{|\lambda_n|\, d(x_0, H)} = \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}\ .$$

En faisant abstraction de l'erreur d'énoncé signalée plus haut, on a bien $\boxed{\forall n \geq n_0,\ \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0,H)}}$.

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E, on a

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

Correction : En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $|||h||| \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0,H)}$ donc $d(x_0, H) \leq \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$ et on a obtenu l'inégalité inverse au [**c**] donc $\boxed{d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}}$.

3) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que, si u est un élément de E avec $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
h est l'application définie sur E dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

a) Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

Correction : On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{u_n}{2^{n+1}}\right| \leq \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ et cette série majorante converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\boxed{\left(\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est absolument convergente donc convergente}}$.

b) Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E et que $|||h||| \leqslant 1$.

Correction : D'après [**a**], h est bien définie. Pour tout $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h(u + \lambda v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = h(u) + \lambda h(v)$$

car toutes les séries convergent. Donc $h \in E^*$. D'autre part, l'inégalité vue au [**a**] donne

$$\forall u \in E, \quad |h(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{u_n}{2^{n+1}}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \|u\|_\infty$$

ce qui montre la continuité de h. De plus, $\forall u \neq 0,\ \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1$ donc, en prenant la borne supérieure, $|||h||| \leq 1$. Donc $\boxed{h \text{ est une forme linéaire continue et } |||h||| \leq 1}$.

c) Soit $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p. On définit v_p par :

$$\begin{cases} v_p(n) = 1 \text{ si } 0 \leqslant n \leqslant p \\ v_p(n) = 0 \text{ si } n > p \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $|||h|||$.

Correction : $\diamond$ On a clairement $v_p \in E$ et $\|v_p\|_\infty = 1$. Or

$$h(v_p) = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}} > 0$$

donc $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$ et donc $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$.

$\diamond$ On a $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leq |||h||| \leq 1$ donc $|||h||| = 1$.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$|||h||| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$$

Correction : Supposons qu'il existe $u \neq 0_E$ tel que $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = |||h||| = 1$ on a donc $|h(u)| = \|u\|_\infty$ et toutes les inégalités du [**b**] sont des égalités. En particulier, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} = 0$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} \geq 0$ donc on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = \|u\|_\infty$. Mais alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u\|_\infty \neq 0$ en contradiction avec le fait que $u \in E$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
Donc il n'existe pas de $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = |||h|||$.

e) On note H le noyau de h, vérifier que H est un hyperplan fermé de E.

Correction : Il suffit d'utiliser le résultat du [**II.a**] : puisque h est continue, $H = \ker h$ est fermé.

f) Montrer que la distance d'un vecteur x de E à l'hyperplan H n'est pas toujours atteinte.

Correction : Soit $x_0 \notin H$, si $d(x_0, H)$ était atteinte alors $\exists z_0 \in H,\ d(x_0, H) = \|x_0 - z_0\|$. Or, selon [**1.e**], $d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$ donc $\|x_0 - z_0\| = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||} = \frac{|h(x_0)-h(z_0)|}{|||h|||}$ et donc, puisque $x_0 - z_0 \neq 0_E$, $\frac{|h(x_0-z_0)|}{\|x_0-z_0\|} = |||h|||$ ce qui est impossible vu [**d**]. Donc pour $x \notin H,\ d(x, H)$ n'est jamais atteinte.