CPGE RÉSEAU IBNGHAZI
MP* 1 (Rabat)

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مموني مولاي اسماعيل

Séries Entières

Introduction

Devoir Maison : CCP 2019

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Q4. Si $x\in \left]-1,1\right[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, la série $\sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

<u>Remarque</u> : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $\left]-1,1\right[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $\left]-1,1\right[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $\left]-1,1\right[$.

Q6. On pose, pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière
On note $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.
Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right),\text{ où } I_n=\{(k,p)\in A,\ kp=n\}.$$

Démontrer que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n=\sum_{d|n} a_d$

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n.

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6**.

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$.

FIN

Corrigé

Partie I : Propriétés

4. • Pour tout $x \in]-1,1[$ fixé, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, donc $1-x^n$ est équivalent à 1 au voisinage de l'infini.

• Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $|a_n \frac{x^n}{1-x^n}| \underset{n\to\infty}{\sim} |a_n x^n|$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n x^n|$ converge, donc par comparaison, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument pour tout $x \in]-1,1[$.

• Considérons la suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k; \\ \dfrac{(-1)^k}{k+1} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+1}$ est de rayon de convergence 1. De plus

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}}.$$

La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{(-1)^{2k+1}}{1-(-1)^{2k+1}} = \frac{-1}{2} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, autrement dit, la série L_a converge en -1.

5. Posons $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}$ pour tout $x \in]-1,1[$. u_n est bien définie sur $[-b,b]$, dérivable et

$$\forall x \in]-1,1[, \ u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

On vérifie aisément, et suivant la parité de n, que :

$$\sup_{x\in[-b,b]} |a_n u_n(x)| = |a_n u_n(\alpha)|,$$

où $\alpha \in \{-b,b\}$, ce qui garantit la convergence normale et donc uniforme sur $[-b,b]$.

6. • Puisque chaque fonction $f_n : x \mapsto a_n u_n(x)$ est continue sur $]-1,1[$ et la convergence est uniforme sur chaque $[-b,b]$ inclus dans $]-1,1[$, la fonction f est continue sur $]-b,b[$ et ceci pour tout $0 < b < 1$. Donc f est continue sur $]-1,1[$.

• Chaque fonction f_n est dérivable sur $]-1,1[$. De même qu'à la question précédente, la série dérivée est uniformément convergente sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans $]-1,1[$. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1,1[, \ \ f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

En particulier, $f'(0) = a_1$.

7. Les I_n forment une partition de A, donc puisque la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable, on peut calculer sa somme en regroupant les termes d'indices $(k,p) \in I_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}.$$

Si $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |a_n x|^{np},$$

et lorsque n tend vers l'infini

$$|a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \sim |a_n x|^n.$$

Il en résulte que la série de terme général $|a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge, et que la série double de terme général $a_n x^{np}$ converge absolument. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{p=1}^{\infty} x^{np} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_n x^{np},$$

et l'on peut calculer cette somme en regroupant les termes de même puissance s

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_n x^{np} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{\{(n,p)/np=s\}} a_{\frac{s}{p}} \right) x^s.$$

Mais $\displaystyle\sum_{\{(n,p)/np=s\}} a^{\frac{s}{p}} = \sum_{d|n} a_d = b_s$. On a finalement

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s.$$

Partie II : Exemples

8. D'après les questions précédentes, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} x^{np} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{\{(n,p)/np=s\}} 1 \right) x^s.$$

Mais $\displaystyle\sum_{\{(n,p)/np=s\}} 1$ est le nombre de façons de pouvoir écrire s comme produit de deux facteurs, c'est-à-dire le nombre de diviseurs de s. On a donc

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{s=1}^{\infty} d_s x^s$$

9. • On a $1 \leq \varphi(n) \leq n$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x|^n \leq |\varphi(n) x^n| \leq n|x|^n$$

Il en résulte que le rayon de convergence est compris entre les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n x^n$. Or ces derniers sont, l'un et l'autre, égaux à 1. D'où $R = 1$.

• Les diviseurs de 12 sont : $1, 2, 3, 4, 6, 12$ et

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$$

L'égalité est bien vérifiée.
• Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

avec $b_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$. D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

10. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ à pour somme $\ln(1 + x)$ sur $]-1, 1[$, d'autre part, on a, d'après l'étude faite sur le séries alternées :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1}$$

inégalité qui montre que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $x \longmapsto \ln(1 + x)$, et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \longmapsto 1, x<1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \lim_{x \longmapsto 1, x<1} \ln(1 + x) = \ln(2).$$

11. • $\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1 - x^n}$. Étudions donc la série $\sum_{n_i \mathbb{N}^*} (-1)^n f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1 - x^n}$. Notons g sa somme. La fonction f_n est dérivable sur chaque $[-b, b]$ inclus dans $]-1, 1[$ ($0 < b < 1$) et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_n'(x) = \frac{(n - 1 + x^n) x^{n-2}}{(1 - x^n)^2}.$$

Donc, suivant la parité de n,

$$\sup_{x \in [-b, b]} |(-1)^n f_n(x)| = |f_n(\alpha)|$$

où $\alpha \in \{-b, b\}$.
Puisque la série numérique de terme général $|f_n(\alpha)|$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n f_n(x)$ est normalement et donc uniformément convergente sur $[-b, b]$.

Comme chaque fonction f_n est continue, la fonction g est continue sur $[-b, b]$, en particulier en 0. D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} (-1)^n f_n(x) = a_1 = -1.$$

Ainsi $f(x)$ est équivalent à $-x$ au voisinage de 0.
• D'après le résultat de la question 6., la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, 1[$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = -1$ ($f(0) = 0$), ce qui justifier aussi le résultat de cette question.

12. Pour tout x de $]0, 1[$, $(1 - x)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1 + x + ... + x^{n-1}}$. Il s'agit donc d'une série alternée, puisque $x > 0$.

Posons $v_n(x) = \frac{x^n}{1 + x + ... + x^{n-1}}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Si $x \in]0, 1[$, $v_n(x) = \frac{(1 - x)x^n}{1 - x^n}$. On voit bien que $(v_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante et de limite nulle, donc d'après le critère special de séries alternées, on peut écrire :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k v_k(x) \right| \leq v_{n+1}(x) \quad (*)$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\sqrt[n]{1.x....x^{n-1}} \leq \frac{1 + x + ... + x^{n-1}}{n},$$

d'où :

$$\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1 + x + ... + x^{n-1}} \leq \frac{1}{n},$$

et donc $0 \leq v_n(x) \leq \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Ceci prouve, en tenant compte de l'inégalité $(*)$, la convergence uniforme de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n v_n(x)$ sur $[0, 1]$, d'où par interversion de limites :

$$\lim_{x\to 1} (1 - x)f(x) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 1} (-1)^n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Donc $f(x)$ est équivalent à $-\frac{\ln(2)}{1 - x}$.

• • • • • • • • •