My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison

Séries numériques

Extraits e3a-CCP et CNC

Exercice 1 (extrait e3a)

1. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

   (b) Démontrer que pour tout réel x de $\Delta, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   (c) On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

   Calculer $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier l'existence de I_n.

   (b) En utilisant la question 1. calculer I_n.

3. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

   Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.
   On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Exercice 2 (extrait e3a)

(a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression: $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

Exercice 3 (extrait e3a)

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,1]$ la fonction en escalier f_n par :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \forall t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[, f_n(t) = w_k \quad \text{et} \quad f_n(1) = w_n.$$

1. Déterminer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Prouver que l'on a, pour tout $t \in [0,1[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt\rfloor+1}$ où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

3. En déduire, pour tout $t \in [0,1]$, la valeur de $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

4. Prouver alors que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \ell$.

Exercice 4 (extrait CCP)

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

Q3. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

Q4. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 5 (extrait CCP)

III.1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_k$ et $B_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b_k$.

En remarquant que, pour $k\geq 1$, $b_k=B_k-B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_nB_n$ (transformation d'Abel).

III.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

III.2.a Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(a_k-a_{k+1})$ converge.

III.2.b En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nb_n$ converge.

III.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n=(-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

III.3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

III.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}$.

III.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Mini Problème 1 (extrait CNC)

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. On considère le polynôme $P_\lambda = X^2 + 2\lambda X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, et on définit la fonction de la variable réelle F_λ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\alpha(x) = \frac{1}{\lambda + \cos x}.$$

0.1 Étude des racines du polynôme P_λ

On note z_1 et z_2 les racines complexes du polynôme P_λ et on suppose que $|z_1| \leq |z_2|$.

0.1.1 Préciser les valeurs de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

0.1.2 On suppose que $|z_1| = 1$ et on choisit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = e^{i\theta}$. Justifier que $z_2 = e^{-i\theta}$ puis trouver une contradiction.

0.1.3 Montrer que $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.

0.2 Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P_\lambda}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

0.3 Développement de la fonction F_λ en série trigonométrique

0.3.1 Vérifier que pour tout réel x, $F_\alpha(x) = \dfrac{2e^{ix}}{P_\lambda(e^{ix})}$.

0.3.2 Montrer que pour tout réel x, $F_\lambda(x) = \dfrac{2}{z_1 - z_2}\left(\dfrac{1}{1 - e^{-ix}z_1} + \dfrac{z_1 e^{ix}}{1 - e^{ix}z_1}\right)$.

0.3.3 Justifier que, pour tout réel x, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} z_1^n \cos(nx)$ est convergente et que

$$F_\alpha(x) = \frac{2}{z_1 - z_2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n \cos(nx)\right).$$

1.1 Une inégalité utile

Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\varphi'' \leq 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

1.1.1 Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) = t\varphi'(0) + \displaystyle\int_0^t (t - s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.2 En déduire que $\varphi'(o) = -\displaystyle\int_0^1 (1 - s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.3 Montrer que, pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, $\varphi(t) = -\displaystyle\int_0^1 (\min(s, t) - st)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.4 Montrer que, pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, $0 \leq \min(s, t) - st < \dfrac{1}{4}$, puis en déduire que

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}.$$

1.2 Étude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique

1.2.1 Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2 t}\mathrm{d}t$.

1.2.2 En déduire que la série numérique $\sum\limits_{n \geq 2} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ est convergente.

Mini Problème 2 (extrait CNC)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$,

1. a) Montrer que $(u_n - u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ ta limite.

d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

e) En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.

a) Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

b) En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n ; $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

b) Vérifier que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$ puis que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $m_n = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geq n\}$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Justifier l'existence de m_n.

b) Etablir que $\exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n}) \leq m_n < 1 + \exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n - 1})$

c) En déduire un équivalent de m_n.

d) Conclure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} = \mathrm{e}$.

FiN

Corrigé

Exercice 1 (e3a 2022)

1. $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $f : t\in]0,+\infty[\longmapsto t^{x-1}e^{-t}\in\mathbb{R}$.
   - f est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   - En 0. $f(t)\sim t^{x-1}$. Or $t\longmapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>0$. Donc par comparaison, f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>0$.
   - En $+\infty$. $f(t)e^{t/2}=\dfrac{t^{x-1}}{e^{t/2}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Donc $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}0\left(e^{(t/2)}\right)$. Or $t\to e^{(t/2)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc, par comparaison, f aussi.

   Ainsi f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x>0$. Comme f est positive, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x>0$.
   Ainsi $\boxed{\Gamma \textbf{ est définie sur } \Delta=]0,+\infty[}$

   (b) Soit $x\in\Delta$ i.e. $x>0$. Soit $u:t\mapsto t^x$ et $v:t\mapsto -e^{-t}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et uv possède des limites finies (et nulles) en 0 et en $+\infty$. Donc par théorème d'intégration par parties généralisée, on a $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}u\,v'$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}u'\,v$ sont de même nature et en cas de convergence $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}u\,v'=\Big[uv\Big]_0^{+\infty}-\int_{]0,+\infty[}u'\,v$.
   Or dans $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}u\,v'$ on reconnait $\Gamma(x+1)$ qui est donc une intégrale convergente, et on a alors : $\Gamma(x+1)=\Big[-t^xe^{-t}\Big]_0^{+\infty}+\displaystyle\int_0^{+\infty}xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=x\Gamma(x)$.
   Ainsi $\boxed{\forall x\in\Delta,\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$

   (c) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$.
   On a $u_0=\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ et, $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2}u_n=\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)}u_n$.
   Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)}\right)u_0=\dfrac{(2n)!}{4^n\,n!}u_0$ ce qui est également vrai pour $n=0$.
   Compte tenu de $u_0=\sqrt{\pi}$, on en déduit $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{4^n\,n!}\sqrt{\pi}}$

2. $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

   (a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $g_n:t\in[0,+\infty[\longmapsto t^{2n}e^{-t^2}$.
   g_n est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et $g_n(t)\underset{+\infty}{=}o\left(e^{-t}\right)$ avec $t\mapsto e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc par comparaison, g_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc :
   $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, I_n \textbf{ est une intégrale convergente}}$

   (b) On considère la fonction $\varphi : x\in]0,+\infty[\longmapsto\sqrt{x}$ et on considère la restriction de g_n à $]0,+\infty[$ que l'on note encore g_n.
   φ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ et g_n est une fonction continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc par théorème de changement de variables sur une intégrale impropre, on a $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}g_n$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}\varphi'\times g_n\circ\varphi$ sont de même nature et égales en cas de convergence, ce qui est le cas ici car g_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   Ainsi $I_n=\displaystyle\int_{]0,+\infty[}g_n=\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{2\sqrt{x}}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{n-\frac{1}{2}}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.
   Ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, I_n=\frac{(2n)!}{n!\,2^{(2n+1)}}\sqrt{\pi}}$

Exercice 2 (e3a 2022)

(a) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Par théorème de convergence des sommes de Riemann, $\boxed{\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \textbf{ converge vers } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : t \in [0,1] \longmapsto t^m$. f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat précédent, $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ i.e.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m = \int_0^1 t^m\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m+1}}$$

Exercice 3 (e3a 2020)

1. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a $\boxed{\int_0^1 f_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n w_k}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0,1[$, on pose $k = \lfloor nt \rfloor$ la partie entière de nt. On a $k \leqslant nt < k+1$ donc $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ et donc $fn(t) = w_{k+1}$.
Ceci étant vrai pour tout t, on a donc : $\boxed{\forall t \in [0,1[, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}}$

3. Soit $t \in [0,1]$.

- Si $t = 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_n$ qui tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini.
- Si $t \in]0,1[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ donc par composition des limites, $f_n(t)$ tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$
- Si $t = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(t) = w_1$.

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers la fonction } \delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}}$

4.

- Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0,1]$.
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $\delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ qui est une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$
- On pose φ la fonction constante sur $[0,1]$ égale à $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$, qui existe car la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente donc bornée. Cette fonction φ est continue par morceaux et donc intégrable sur le segment $[0,1]$ et de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

Ainsi, on a bien vérifiée ici les hypothèses du théorème de convergence dominée et on a : $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite vaut $\int_{[0,1]} \delta$. On en déduit le résultat : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n w_k = \ell}$, résultat connu sous le nom de lemme de Cesaro

Exercice 4 (CCP 2017)

Comme les familles proposées sont à valeurs positives, le caractère sommable équivaut au caractère borné des sommes finies. Et dans ce cas, on sait que l'on peut obtenir la somme en sommant dans l'ordre que l'on veut.

3. A q fixé, $\sum(\frac{1}{p^2q^2})_{p\geq 1}$ est une série convergente et sa somme est $S_q = \frac{\pi^2}{6q^2}$. $\sum(S_q)_{q\geq 1}$ converge et la famille proposée est ainsi sommable et
$$\sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

4. Il suffit de montrer qu'il existe des sous-familles finies de somme arbitrairement grande. Remarquons que $p^2+q^2 \leq (p+q)^2$. On considère la sous-famille constituée des éléments d'indice (p,q) avec $p+q \leq r$. La somme associée est
$$\sum_{k=2}^{r} \sum_{p+q=k} \frac{1}{p^2+q^2} \geq \sum_{k=2}^{r} \sum_{p+q=k} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{k=2}^{r} \frac{k+1}{k^2}$$
Comme $\frac{k+1}{k^2} \sim \frac{1}{k}$ est le terme général d'une série positive divergente, les sommes précédentes peuvent effectivement être arbitrairement grandes et la famille est non sommable.

Exercice 5 (CCP 2014)

Partie 1 : convergence de séries par transfo d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_k = a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kB_k - \sum_{k=1}^{n} a_kB_{k-1}$.
Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k-1$.
$S_n = a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kB_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}B_j = a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k + a_nB_n - a_1B_0$
$= a_0b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k - (a_0 - a_1)B_0 + a_nB_n - a_1b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_nB_n$

2. (a) Par théorème, la suite (a_n) étant convergente, la série $\sum_{k\geq 0} a_k - a_{k+1}$ est également convergente (c'est même une CNS).

   (b) Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.
   D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_nB_n$.
   Le second terme (a_nB_n) tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.
   Le premier terme est une somme partielle de la série de TG $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.
   Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.
   Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1})B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times M = (a_k - a_{k+1}) \times M$ car (a_k) est une suite décroissante.
   Ainsi, $(a_k - a_{k+1})B_k$ est dominée par une le TG d'une série absolument convergente.
   Donc $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.

   (c) • Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k\geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.
   • Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\right)$ est une suite bornée.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce assure bien le résultat demandé.

3. (a) • On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.
   • Par théorème, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{(-2i)\sin(n\theta/2)}{(-2i)\sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

   (b) • Lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
   • Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
   • Soit $\alpha \in]0, 1]$.
   On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **2b2**.
   Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.
   La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers 0.
   D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles qui va bien est bornée.
   Conclusion : la série est convergente.

Mini Problème 1 (CNC 2022)

0.1 Étude des racines du polynôme P_λ

0.1.1 D'après la relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme $z_1 + z_2 = -2\lambda$ et $z_1 z_2 = 1$.

0.1.2 Comme $z_1 z_2 = 1$, alors $z_2 = \dfrac{1}{z_1} = e^{-i\theta}$. Dans ce cas $2\lambda = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, donc $\lambda = \cos\theta$ ce qui est absurde puisque $\lambda \notin [-1, 1]$.

0.1.3 0 n'est pas une racine de P_λ, donc $|z_1| > 0$. Si $|z_1| > 1$, alors $|z_2| \geq |z_1| > 1$ ce qui donne $|z_1 z_2| > 1$. Mais ceci est impossible puisque $z_1 z_2 = 1$. Donc, compte tenu de la question 0.1.2, nécessairement $|z_1| < 1$.
On ne peut pas avoir $|z_2| \leq 1$, sinon $z_1 z_2$ serait différent de 1. En conclusion, $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.

0.2 On a $P_\lambda = (X - z_1)(X - z_2)$, donc $\dfrac{1}{P_\lambda} = \dfrac{\alpha}{X - z_1} + \dfrac{\beta}{X - z_2}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{z_1 - z_2}$ et $\beta = \dfrac{1}{z_2 - z_1}$. D'où :

$$\frac{1}{P_\lambda} = \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{X - z_1} - \frac{1}{X - z_2}\right).$$

0.3 Développement de la fonction F_λ en série trigonométrique

0.3.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{\lambda + \cos x} = \frac{2}{2\lambda + e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{2e^{ix}}{2\lambda e^{ix} + e^{2ix} + 1} = \frac{2e^{ix}}{P_\lambda(e^{ix})}.$$

0.3.2 D'après le décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_\lambda}$, on obtient :

$$F_\lambda(x) = \frac{2e^{ix}}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{e^{ix} - z_1} - \frac{1}{e^{ix} - z_2}\right) = \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{1 - z_1 e^{-ix}} - \frac{1}{1 - z_2 e^{-ix}}\right)$$

et comme $z_1 z_2 = 1$, alors :

$$F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{1 - z_1 e^{-ix}} + \frac{z_1 e^{ix}}{1 - z_1 e^{ix}}\right).$$

0.3.1 On a $|z_1 \cos(nx)| \leq |z_1|^n$ et la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} |z_1|^n$ converge (série géométrique de raison $|z_1| < 1$), donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} z_1^n \cos(nx)$ converge absolument, donc elle converge. D'autre part, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et puisque $|z_1| < 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(e^{-ix} z_1\right)^n = \dfrac{1}{1 - e^{-ix} z_1}$, de même, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(e^{ix} z_1\right)^n = \dfrac{1}{1 - e^{ix} z_1}$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_\alpha(x) &= \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-ix} z_1\right)^n + z_1 e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{ix} z_1\right)^n\right) \\
&= \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-ix} z_1\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{ix} z_1\right)^n\right) \\
&= \frac{2}{z_1 - z_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n (e^{inx} + e^{-inx})\right) \\
&= \frac{2}{z_1 - z_2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z_1^n \cos(nx)\right)
\end{aligned}$$

1.1 **Une inégalité utile**

1.1.1 La fonction φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, donc on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale sur l'intervalle $[0,t]$ où $t \in [0,1]$. On a :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s = t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$$

1.1.2 Il suffit de remplacer t par 1 dans la formule précédente.

1.1.3 Appliquons la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\min(s,t)-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s &= \int_0^t (\min(s,t)-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s + \int_t^1 (\min(s,t)-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t (s-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s + \int_t^1 (t-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^t (s-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s = (1-t)\int_0^t s\varphi''(s)\mathrm{d}s = (1-t)\left(\left[s\varphi'(s)\right]_0^t - \int_0^t \varphi'(s)\mathrm{d}s\right) = (1-t)\left[t\varphi'(t)-\varphi(t)\right]$$

et $$\int_t^1 (t-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s = t\int_t^1 (1-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s = t\left(\left[(1-s)\varphi'(s)\right]_t^1 + \int_t^1 \varphi'(s)\mathrm{d}s\right) = -t\left[-(1-t)t\varphi'(t)+\varphi(t)\right].$$

D'où $$\int_0^1 (\min(s,t)-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s = (1-t)\left[t\varphi'(t)-\varphi(t)\right] - t\left[-(1-t)t\varphi'(t)+\varphi(t)\right] = -\varphi(t).$$

1.1.4 Pour $s \in [0,1]$ fixé, on pose $h(t) = \min(s,t) - st$. On a :

$$h(t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si } 0 \le t \le s \\ s(1-t) & \text{si } s < t \le 1 \end{cases}$$

Cette fonction h est positive sur $[0,1]$, croit sur $[0,s]$ et décroit sur $[s,1]$, donc $0 \le h(t) \le h(s) = s - s^2$. La fonction $s \mapsto s - s^2$ admet un maximum en $\frac{1}{2}$ qui égal à $\frac{1}{4}$. D'où :

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2, \ \ 0 \le \min(s,t) - st \le \frac{1}{4}.$$

L'inégalité de la question 1.1.3 montre que $\varphi(t) \ge 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, par inégalité triangulaire des intégrales :

$$0 \le \varphi(t) \le \frac{1}{4}\int_0^1 -\varphi''(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{4}\left(\varphi'(0) - \varphi'(1)\right).$$

1.2 **Étude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique**

1.2.1 La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est continue sur $[2,+\infty[$, de plus, pour $x \ge 2$, on a :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = -\left[\frac{1}{\ln t}\right]_2^x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}$$

Cette quantité admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t}$ converge et sa valeur vaut $\dfrac{1}{\ln 2}$.

1.2.2 La fonction f étant croissante sur $[2,+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ sont de même nature, comme elle s'agit d'une intégrale convergente alors la série $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge.

Mini Problème 1 (CNC 2021)

1. **a)** On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1) \\ &= \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

De plus

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

et

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Par suite $u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ et $\boxed{(u_n - u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}}$.

b) Comme $(u_n - u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ alors $(u_n - u_{n+1})$ est positive à partir d'un certain rang , la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge , par comparaison la série $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$ converge .

c) Soit S_n la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}$$

donc $u_n = u_1 - S_{n-1}$. La convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$ entraine la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$et de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

d) Soit $n \geq 2$,et $1 \leq k \leq n-1$. Pour $t \in [k, k+1]$ on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$ ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$

e) D'après d) $H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{n} \leq H_n - \ln(n) \leq 1$, par passage à la limite on obtient $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$.

2. **a)** D'après c) on a $u_n = u_1 - S_{n-1}$ et $u_1 = 1$ de plus $u_n - u_{n+1} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1+\frac{1}{k}) - \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(\frac{k}{k-1}) \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient $\boxed{\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)}$.

b) $v_n = u_n - \gamma = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(\frac{k}{k-1}) - \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} - \ln(\frac{k}{k-1})$, donc $\boxed{v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)}$ c'est le reste de la série $\sum\limits_{k\geq 2} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

c) On a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} &= -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}) \end{aligned}$$

donc $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2k^2}$, les deux séries $\sum\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}$ et $\sum\frac{1}{2k^2}$ convergents donc les restes sont équivalents , ce qui donne $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2k^2}$, ainsi

$$v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$$

car si $\alpha>1$ alors $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

On a $v_n=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$ donc $\boxed{H_n=\ln(n)+\gamma+v_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n ; $w_n=u_n-\gamma-\frac{1}{2n}$.

a) On a

$$w_{n+1}-w_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}$$

et

$$u_n-u_{n+1}=\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}$$

donc

$$w_{n+1}-w_n=-\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}.$$

Comme

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n &= \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)+o(\frac{1}{n^3})\\ &= \frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

et $\boxed{w_{n+1}-w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{6n^3}}$.

b) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{1}{n^2}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(1-\left(1-\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})\right)\right)\\ &= \frac{2}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n^3}$$

les deux séries $\sum\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2},\sum\frac{2}{n^3}$ convergent donc les restes sont équivalents , de plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}}$$

c) On a pour tout entier naturel non nul n,

$$w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n} \text{ et } w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$$

donc la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge.

Remarquons que la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n - w_1$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) = -w_1$$

et le reste

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Des relations

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) &= -w_1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) + \sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) \\
&= w_n - w_1 + \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).
\end{aligned}$$

on a

$$w_n = \frac{-1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Comme $H_n = w_n + \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}$ alors

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{12n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)}$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $m_n = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geq n\}$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Comme la suite $(H_k)_{k\geq 1}$ est croissante et tend vers l'infini, alors l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geq n\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$ et admet donc un plus petit élément.

b) Par définition de m_n on a $H_{m_n} \geq n$ et $H_{m_n-1} < n$. De la question 1)d) on a $n \leq H_{m_n} \leq \ln m_n + 1$ donc $\mathrm{e}^{n-1} \leq m_n$ et $m_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

De la question 2) c) on a $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ donc

$$\ln(m_n) + \gamma + \varepsilon_{m_n} \geq n \text{ et } \ln(m_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{m_n-1} < n$$

Ainsi $\boxed{\exp\left(n - \gamma - \varepsilon_{m_n}\right) \leq m_n < 1 + \exp\left(n - \gamma - \varepsilon_{m_n-1}\right)}$

c) La relation précédente donne

$$\exp\left(-\varepsilon_{m_n}\right) \leq \frac{m_n}{\exp\left(n-\gamma\right)} < \exp\left(-n+\gamma\right) + \exp\left(-\varepsilon_{m_n-1}\right)$$

Comme $\varepsilon_{m_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\dfrac{m_n}{\exp\left(n-\gamma\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $\boxed{m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(n-\gamma\right)}$.

d) La question b) donne

$$\frac{\exp\left(n+1-\gamma-\varepsilon_{m_{n+1}}\right)}{1+\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n-1}\right)} < \frac{m_{n+1}}{m_n} < \frac{1+\exp\left(n+1-\gamma-\varepsilon_{m_{n+1}-1}\right)}{\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n}\right)}$$

après simplification

$$\frac{\exp\left(1-\varepsilon_{m_{n+1}}\right)}{\exp\left(-n+\gamma\right)+\exp\left(-\varepsilon_{m_n-1}\right)} < \frac{m_{n+1}}{m_n} < \frac{\exp\left(-n+\gamma\right)+\exp\left(1-\varepsilon_{m_{n+1}-1}\right)}{\exp\left(-\varepsilon_{m_n}\right)}$$

Le théorème d'encadrement donne $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m_{n+1}}{m_n} = \mathrm{e}}$.