CPGE RÉSEAU IBNGHAZI

MP* 1 (Rabat)

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Suites et Séries de fonctions

Devoir Maison (Type CCP)

Théorème de Stone-Weierstrass

Démonstration par les polynômes de Bernstein

Soit E un evn de dimension finie . $C^0([0,1],E)$ est muni de la norme de la convergence uniforme

$$N_\infty(f) = \sup(\|f(t)\|, t \in [0,1])$$

On pose pour tout entiers $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq k \leq n$

$$E_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k}$$

(Polynômes de BERNSTEIN : ils ont étés introduits par le mathématicien Bernstein au début du 20^{ieme}siècle , par des arguments probablistes : en effet dans la loi binomiale $B(n,p)$ qui compte le nombre de succes dans une suite de n épreuves indépendantes ,où p est la probabilité d'un succes sur une épreuve, la probabilité d'obtenir k succes est : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$)

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} E_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} E_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} E_{n,k}$

2. En déduire la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (k-nx)^2 E_{n,k} = nX(1-X)$

   Soit $f \in C^0([0,1],E)$ et $\varepsilon > 0$. On se propose de déterminer une fonction polynôme P à coefficients dans E

   $$\overrightarrow{P(x)} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} x^k \overrightarrow{a_k}, \text{et } \overrightarrow{a_k} \in E$$

   telle que $N_\infty(f-P) < \varepsilon$

3. Soit $\alpha > 0$ et $t \in [0,1]$. On note

   $$A_n = \left\{ k \in <0,n>, \left| \frac{k}{n} - t \right| \geq \alpha \right\}$$

   Montrer à l'aide de 2°que $\displaystyle\sum_{k \in A_n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^k(1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$

4. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

   $$\forall (x,y) \in [0,1], |x-y| \leq \alpha \Rightarrow \left\| \overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(y)} \right\| \leq \varepsilon$$

5. On pose $\overrightarrow{P_n(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^k(1-t)^{n-k} \overrightarrow{f(\frac{k}{n})}$. Montrer que $\forall t \in [0,1]$

   $$\left\| \overrightarrow{P_n(t)} - \overrightarrow{f(t)} \right\| \leq \frac{N_\infty(f)}{2\alpha^2 n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

   on appelle polynôme d'interpolation de Bernstein de f le polynôme $\overrightarrow{P_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^k(1-t)^{n-k} \overrightarrow{f(\frac{k}{n})}$.

   Calculer $\lim_{n\to\infty} N_\infty(\overrightarrow{P_n} - \overrightarrow{f})$

THEOREME DE STONE WEIERSTRASS TRIGONOMETRIQUE

(démonstration par les sommes Fejer CCP 2004)

On sait que pour toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale P telle que $\sup\{|f(x)-P(x)|, x \in [a,b]\} = N_\infty(f-P) < \varepsilon$. Ceci revient à dire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales P_n telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(P_n - f) = 0$, ou encore : f est la limite uniforme (ie:pour la norme N_∞) d'une suite de fonctions polynomiales. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note e_n : $\begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \to & e^{inx} \end{matrix}$ qui est donc une application 2π périodique. On appelle polynôme trigonomètrique toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $P = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e_k$. Le nom de polynôme vient du fait que $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k X^k$ ou l'on a posé $X = e^{it}$

Le théorème de Stone Wierstass pour les fonctions périodiques s'énonce ainsi:

Pour toute fonction continue 2π périodique f à valeurs dans $\mathbb{C}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale trigonomètrique P telle que $\sup\{|f(x)-P(x)|, x \in [a,b]\} = N_\infty(f-P) < \varepsilon$.

Dans ce qui suit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$,est une fonction 2π périodique.

1. Justifier les formules $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \dfrac{\cos(\frac{mt}{2})\sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\dfrac{t}{2})} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \dfrac{\sin(\frac{mt}{2})\sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\dfrac{t}{2})}}$

2. Justifier l'existence de $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. De même soit $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout couple de réels (x,y) tels que $|x-y| < \delta_\varepsilon$, $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$

3. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, .on pose $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$
   - préciser $c_n(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1
   - Montrer que $\boxed{\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)\dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\dfrac{x}{2})}dx}$

   On pose $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$, et, pour $m \in \mathbb{N}, \sigma_m(f) = \dfrac{1}{m+1}\sum_{N=0}^{m} S_N(f)$

   Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ $\boxed{\sigma_m(f)(t) = \dfrac{1}{2\pi(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)\dfrac{\sin^2((\dfrac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\dfrac{x}{2})}dx}$

4. En déduire , si $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,$m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\sigma_m(f)(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi(m+1)}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x)-f(t))\frac{\sin^2((\dfrac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\dfrac{x}{2})}dx\right| \\ &\leq \varepsilon/2 + \frac{1}{2\pi(m+1)}\int_{\delta_\varepsilon \leq |x| \leq \pi} 2M\frac{\sin^2((\dfrac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\dfrac{x}{2})}dx \\ &\leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{(m+1)\sin^2(\dfrac{\delta_\varepsilon}{2})} \end{aligned}$$

   penser à vérifier que $\sigma_m(1) = 1$

5. Conclure .

Polynômes de Bernstein

Sergei Natanovic Bernstein est né en 1880 et est mort en 1968.

1) Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour n entier naturel non nul donné , le n-ième polynôme de Bernstein associé à f est :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}.$$

2) L'identité $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.

a) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1$.
Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) = 1$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1.$$

b) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$.
Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) = x$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}.$$

1er calcul. Pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= X \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-1)-(k-1)} = X \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} X^l (1-X)^{(n-1)-(l)} = X(X + (1-X))^{n-1} = X. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = X.$$

2 ème calcul. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-Y)^{n-k} &= \frac{X}{n} \sum_{k=1}^{n} C_n^k k X^{k-1} (1-Y)^{n-k} \\ &= \frac{X}{n} \frac{d}{dX} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-Y)^{n-k} \right) = \frac{X}{n} \frac{d}{dX} \left((X + 1 - Y)^n \right) = X(X + 1 - Y)^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-Y)^{n-k} = X(X+1-Y)^{n-1}.$$

En particulier, quand $Y = X$, on retrouve le résultat précédent .

c) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x(x-1)$.
Si, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) = x(x-1)$, alors pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1er calcul. Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$k(n-k)C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!} = n(n-1)C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
B_n(f) &= -\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-2)-(k-1)} \\
&= -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} X^{k} (1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X)(X+1-X)^{n-2} \\
&= -\frac{n-1}{n} X(1-X).
\end{aligned}$$

L'égalité précédente restant vraie pour $n = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X).$$

2 ème calcul.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k (1-Y)^{n-k} &= -\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k (1-Y)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-Y)^{n-k}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial Y}((X+1-Y)^n)\right) = -n(n-1))\frac{1}{n^2} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2} \\
&= -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k (1-Y)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}.$$

En particulier, quand $Y = X$, on retrouve le résultat précédent .

d) Calcul de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 X^k (1-X)^{n-k} - 2nX \sum_{k=0}^{n} k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2X^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-n) X^k (1-X)^{n-k} - n(2X-1) \sum_{k=0}^{n} k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2X^2 \\
&= n^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right) X^k (1-X)^{n-k} - n^2(2X-1) \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2X^2
\end{aligned}$$

et donc les résultats de a), b) et c)

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = n^2\left(-\frac{n-1}{n}X(1-X)-(2X-1)X+X^2\right) = n^2(-\frac{1}{n}X^2+\frac{1}{n}X) = nX(1-X).$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X).}$$

3) Convergence uniforme de la suite des polynômes de Bernstein

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

a) Une majoration de $|f(x)-B_n(f)(x)|$.
Soit x un réel de $[0,1]$ et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &= \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&= \left|f(x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\right| \text{ (d'après 1)a))} \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

b) Pourquoi l'expression précédente est-elle petite ?

Tout d'abord, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = 1$ est une expression bornée uniformément en x.

Ensuite, pour x donné et pour des k tels que $\left|x-\dfrac{k}{n}\right|$ est petit, $\left|f(x)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|$ est petit. Pour les k tels que $\dfrac{k}{n}$ est assez éloigné de x et décrivant donc un sous-ensemble J de $[\![0,n]\!]$, $\left|f(x)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|$ est bornée uniformément en x et il n'y a qu'à espérer que $\displaystyle\sum_{k\in J} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ soit petit. Mais là, on dispose de

$$\sum_{k\in J} C_n^k \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}...$$

c) Soit ε un réel strictement positif.
f est continue sur le segment $[0,1]$ et est donc d'une part bornée sur ce segment, et d'autre part uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Par suite, il existe un réel M tel que pour tout x de $[0,1]$, $|f(x)| \leq M$ et il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

d) Soient n un entier naturel non nul et x un réel de $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}}^{n} C_n^k \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f)(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\substack{k=0\\|x-\frac{k}{n}|<\alpha}}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + 2M\sum_{\substack{k=0\\|x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{\substack{k=0\\|x-\frac{k}{n}|\geq\alpha}}^{n} C_n^k\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n}\text{(d'après 1)),}\end{aligned}$$

(dans la deuxième somme, l'inégalité $\left|x-\dfrac{k}{n}\right| \geq \alpha$ s'écrit encore $1 \leq \dfrac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2}$) et donc :

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2}\frac{1/4}{n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2},$$

(si $x \in [0,1]$, $x(1-x) = \dfrac{1}{4} - \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$). En résumé, $\varepsilon > 0$ strictement positif ayant été donné, on a montré que :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x)-B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}.$$

Or, $\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\alpha^2}$ tend vers $\dfrac{\varepsilon}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que tout entier naturel $n \geq n_0$, $\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\alpha^2} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $|f(x)-B_n(f)(x)| < \varepsilon$.

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x)-B_n(f)(x)| < \varepsilon,$$

et donc que

La suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ des polynômes de BERNSTEIN converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4) Le théorème de WEIRSTRASS.

D'après 2), toute fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes.
Plus généralement, soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = f((b-a)x+a).$$

Comme la fonction $x \mapsto (b-a)x+a$ est un homéomorphisme de $[0,1]$ sur $[a,b]$ (de réciproque la fonction $x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}$) et que f est continue sur $[a,b]$, g est continue sur $[0,1]$. Il existe alors une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$.
Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[a,b]$, posons

$$P_n(x) = Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour x dans $[0,1]$ et $n \geq n_0$, $|g(x)-Q_n(x)| < \varepsilon$. Mais alors, pour $n \geq n_0$ et x dans $[a,b]$,

$$|f(x)-P_n(x)| = \left|g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

car $\dfrac{x-a}{b-a}$ est dans $[0,1]$.

On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

et donc la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$. D'où le :

> **Théorème de Weirstrass.** Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.

5) Peut-on généraliser à $\mathbb{R}$?

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Nous allons montrer que f est nécessairement un polynôme.

D'après le critère de Cauchy uniforme, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_p(x) \leq 1,$$

et en particulier pour $n \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1.$$

Pour $n \geq n_0$, le polynôme $P_n - P_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$ et donc constant. Par suite,

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0).$$

Quand n tend vers $+\infty$ à x fixé, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P_{n_0}(x) - P_{n_0}(0) + f(0).$$

On a montré que :

> Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, f est nécessairement un polynôme.

Ce résultat montre que les séries entières usuelles de rayons infini (de somme e^x ou $\cos x$ ...) ne sont pas uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.