My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

DM Algèbre Générale
Les Dérangements

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle *dérangement* de E toute permutation f de E sans point fixe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall\, k \in E, \quad f(k) \neq k$$

Bien entendu, le nombre de dérangements d'un ensemble fini ne dépend que de son cardinal.

Pour tout entier naturel non nul n, on note Der_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, et d_n son cardinal.

1 Soit n un entier naturel non nul. Donner le cardinal de l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

2 Calculer d_1 et d_2.

3 On fixe un entier naturel $n \geqslant 3$, et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on considère les ensembles

$$X_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = f(n) = k\} \quad \text{et} \quad Y_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = k, f(n) \neq k\}$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer les cardinaux de X_k et de Y_k en fonction de d_{n-2} et d_{n-1}.
Indication : on pourra établir une bijection entre Y_k et Der_{n-1}.

4 En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la formule :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

5 Montrer, pour tout $n \geqslant 2$:

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

6 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Corrigé

1 $n!$ (cours).

2 $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$.

3 Se donner un élément de X_k, c'est se donner un dérangement de $[\![1, n-1]\!] \backslash \{k\}$: X_k est donc de cardinal d_{n-2}.

On définit une application ψ de Y_k vers Der_{n-1}, de la façon suivante : à tout élément f de Y_k, on associe le dérangement de $[\![1, n-1]\!]$, coïncidant avec f sur $[\![1, n-1]\!] \backslash \{k\}$, et envoyant k sur $f(n)$.

On définit également une application ϕ de Der_{n-1} vers Y_k envoyant un dérangement g de $[\![1, n-1]\!]$ sur le dérangement de $[\![1, n]\!]$ coïncidant avec g sur $[\![1, n-1]\!] \backslash \{k\}$, envoyant k sur n, et n sur $g(k)$. On vérifie aisément que :

$$\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{Y_k} \quad \text{et} \quad \psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{Der_{n-1}}$$

Ainsi, Y_k et Der_{n-1} sont en bijection, et ont donc même cardinal d_{n-1}.

4 Comme Der_n est la réunion disjointe des ensembles $X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$, la question précédente prouve que :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

5 Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on formule l'hypothèse :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$$

L'amorçage pour $n = 2$ est aisé.

Fixons un entier $n \geqslant 2$, supposons $\mathcal{H}_n$, et déduisons-en $\mathcal{H}_{n+1}$: $n+1 \geqslant 3$, donc on a $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$ d'après la question précédente. D'après l'hypothèse de récurrence, $d_{n-1} = \frac{d_n - (-1)^n}{n}$, ce qui donne en remplaçant dans l'expression précédente :

$$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la propriété est vérifiée, pour tout entier $n \geqslant 2$.

6 Pour tout entier naturel non nul n, on formule l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

On vérifie aisément que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Fixons un entier naturel non nul n, supposons $\mathcal{H}_n$, et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$:

$$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1} = (n+1)\left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}\right) + (-1)^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!}\right) + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n+1} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la formule est bien vérifiée pour tout entier naturel non nul n.