CPGE Ibn Ghazi
Rabat (MP*1)

Prof. MAMOUNI
myismail.net

DM
calcul diff

Les classics

Thème 1 / différentielle de l'inverse

1) mq $f : Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{R})$, $A \longmapsto A^{-1}$ est diff en tout $A \in Gl_n(\mathbb{R})$

avec $df(A).H = -A^{-1}.H.A^{-1}$

2) retrouver autrement le résultat suivant $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \neq 0$

3) Soit E algèbre normé et $f : U(E) \longrightarrow U(E)$, $a \mapsto a^{-1}$

Comme en 1) f diff en tout $a \in U(A) = \{$elt inversibles de $E\}$

avec $df(a).h = -a^{-1} * h * a^{-1}$

Soit $g : E \to E$ diff ~~et~~ $\forall x \in E$ tq $g(x) \in U(E)$

on pose $\frac{1}{g} : E \longrightarrow U(E)$, $x \longmapsto g(x)^{-1}$

mq $\frac{1}{g}$ est diff et que $d\left(\frac{1}{g}\right)(a).h = -g(a)^{-1} * (dg(a).h) * g(a)^{-1}$

Scanné avec CamScanner

④ Retrouver le resultat suivant $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

⑤ on suppose que $g : E \to \mathbb{R}^*$ diff

mq $\frac{1}{g} : E \to \mathbb{R}^*$ est diff
$x \mapsto \frac{1}{g(x)}$

avec $d\left(\frac{1}{g}\right)(a).h = -\frac{dg(a).h}{g(a)^2}$

⑥ i) Mq $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est differentiable
$A \mapsto \det A$

avec $d\det(A).H = Tr({}^t\mathrm{Com}A . H)$

ii) En deduire que $\frac{1}{\det} : Gl_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est diff

avec $d\left(\frac{1}{\det}\right)(A).H = -\frac{Tr({}^t\mathrm{Com}A . H)}{(\det A)^2}$

⑦ Mq $\mathrm{Com} : Gl_n(\mathbb{R}) \to Gl_n(\mathbb{R})$ est diff
$A \mapsto \mathrm{Com}A$

et donner $d(\mathrm{Com})(A).H$

Thème 2 / Inégalité des accroissements finis

① Soit $g : [0,1] \to F$ (evn) différentiable et $k > 0$
tq $\|dg\|_\infty \leq k$
$\forall \varepsilon > 0$ on pose $A_\varepsilon = \{t \in [0,1]$ tq $\|g(x) - g(0)\| \leq (k+\varepsilon).x$
$\forall x \in [0,t]\}$

ⓘ mq A_ε admet une borne sup notée t_ε

ⓘⓘ On suppose que $t_\varepsilon < 1$

ⓐ Justifier l'existence d'une suite $h_n > 0$ tq $\lim_{+\infty} h_n = 0$

et $\|g(t_\varepsilon + h_n) - g(0)\| > (k+\varepsilon)(t_\varepsilon + h_n)$

indic : penser à la propriété caract du sup

ⓑ En déduire que $\|g(t_\varepsilon) - g(0)\| > (k+\varepsilon)\, t_\varepsilon$

ⓒ **Montrer que $t_\epsilon \in A_\epsilon$**

ⓓ En déduire une contradiction

ⓘⓘⓘ Conclure que $\|g(1) - g(0)\| \leq k$

② Soit $f : U \subset E \to F$ diff sur U ouvert convexe
tq $\exists k > 0$ vérifiant $\|df\|_\infty \leq k$

mq $\|f(b) - f(a)\| \leq k\|b - a\|$ $\forall a, b \in U$

indic : $g : [0,1] \to F$
$t \mapsto f(a + t(b-a))$

③

(3) On considère $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > 0,\ 1 < x^2+y^2 < 4\}$

(i) Représenter graphiquement U

(ii) Mq U n'est pas convexe

(iii) On considère $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Justifier que f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que $\|df\|_{\infty, U} < 1$

(iv) Calculer $\dfrac{\left|f\left(\frac{1}{n}, 1\right) - f\left(\frac{1}{n}, -1\right)\right|}{\left\|\left(\frac{1}{n}, 1\right) - \left(\frac{1}{n}, -1\right)\right\|}$

(v) Que peut-on conclure

Thème 3 / Inversion locale en dim finie

$f : E \to F$ est dit $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme ssi

f de classe $\mathcal{C}^1$

f bij et $f^{-1} : F \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$

(1) Mq si f est un $\mathcal{C}^1$-difféom alors

$\dim E = \dim F$

$df(a) : E \to F$ isom

$df(a)^{-1} = (df^{-1})(f(a))$

② thm du pt fixe

Soit $u : E \to E$ k-lipschitzienne

Soit $U \subset E$ tq $f(U) \subset U$ avec $0 < k < 1$

Mq $\exists ! x \in \overline{U}$ tq $u(x) = x$

indic $x_0 \in U$ qlq, $x_{n+1} = u(x_n)$. Mq $\sum_{n \geq 0} \|x_{n+1} - x_n\|$ cvge

3) On s'interesse mt à la reciproque de la qst 1

Soit $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (ouvert)

tq $df(a) : E \to F$ isom pour $a \in U$

(i) Justifier que $\dim E = \dim F$

(ii) on fixe $y \in F$ et on considère l'app

$$\phi_y : U \subset E \to F$$
$$x \mapsto x - (df(a))^{-1} \cdot (f(x) - y)$$

(a) Justifier que ϕ_y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U

et que $d\phi_y(a) = 0$ $\forall y \in F$

(b) En deduire que $\exists r > 0$ tq $B(a, r) \subset U$

et $\|d\phi_y\|_{\infty, B(a,r)} < 1/2$ et $\phi_y(B(a,r)) \subset B(a,r)$

(c) Conclure que $\exists ! x \in \overline{B}(a, r)$ tq $\phi_y(x) = x$

(d) Conclure que $f_{|\overline{B}(a,r)}$ est bijective de $\overline{B}(a,r)$ vers $\overline{B}(f(a), \delta)$

$\boxed{\text{mq } \exists \delta > 0 \text{ tq } \|(df(a))^{-1}(f(a) - y)\| \leq r/2 \quad \forall y \in B(f(a), \delta)}$

(4) Selon qst Thème 3, 3-ii-c

$\forall y \in \overline{B}(f(a),\delta)$, $\exists! x \in \overline{B}(a,r)$ tq $y = f(x)$

posons $x = f^{-1}(y) \in \overline{B}(a,r)$ l'unique pt

verifiant $\phi_y(x) = x$

$f^{-1} : W = \overline{B}(f(a),\delta) \longrightarrow \overline{B}(a,r)$ est bien défini

(i) Mq $\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \leq \|d\phi_y\|_{\infty,\overline{B}(a,r)} \|x_1 - x_2\|$

$\forall (x_1, x_2) \in \overline{B}(a,r)$ $\forall y \in W$

(ii) Mq $\|\phi_{y_1}(x) - \phi_{y_2}(x)\| \leq \|(df(a))^{-1}\|_\infty \|y_1 - y_2\|$

$\forall x \in V$, $\forall y_1, y_2 \in W$

(iii) On déduit que f^{-1} est lipsch donc continue

(5) (i) Mq $\forall x \in V$ on a $d\phi_y(x) = id_V - df(a)^{-1} \circ df(x)$

(ii) puisque $df(x) = df(a) \circ (id_V - d\phi_y(x))$

est inversible

$\forall x \in V$

(6) Soit A algèbre normé de dim fini

mq l'app $inv : U(A) \longrightarrow U(A)$, est diff

$a \longmapsto a^{-1}$

avec $d(inv)(a).h = -a^{-1}.h.a^{-1}$

(6)

(7) on considère le schéma suivant

mq f^{-1} est diff en $y \in W$ $\left((df)^{-1}(y)\right)$

puis que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$

(8) Conclure le résultat suivant : thm d'inversion locale

si U ouvert de E

si $f : U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$

si $\exists a \in U$ tq $df(a) : E \to F$ isom

Alors $\exists V = \bar{B}(a,r)$ vois de a

$\exists W = \bar{B}(f(a), \delta)$ vois de $f(a)$

tq $f_{|V} : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféom

Thème 4 / thm des fcts implicites /

Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ avec U ouvert

tq f de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $(a,b) \in U$ tq $f(a,b) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

on définit $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x, f(x,y))$

1) Donner $Jg(a,b)$

En deduire que $dg(a,b)$ inversible

2) En deduire que $\exists V$ voisinage de (a,b)

et W voisinage de $(a,0)$

tq $g_{/V} : V \longrightarrow W$ C^1-diffeom

3) Justifier l'existence de V_1 vois de a

V_2 " de b

tq $V_1 \times V_2 \subset V$

4) Justifier que $g(V_1 \times V_2)$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(a,0)$

5) En deduire que $\exists O$ vois de a tq $O \times \{0\} \subset g(V_1 \times V_2)$

puis que $\forall x \in O$, $\exists ! y \in V_2$ tq $(x,0) = g(x,y)$

6) Selon les notations de qst 5 on pose $y = \phi(x)$

Ainsi $\phi : O \longrightarrow V_2$ est bien definie
$x \longmapsto y = \phi(x)$

i) Justifier que $f(x, \phi(x)) = 0$ $\forall x \in O$

ii) Justifier que ϕ est de classe C^1 sur O

iii) En deduire que $\phi'(a) = - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

8

(7) En déduire le résultat suivant (thm des fct implicites)

si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ où U ouvert

si $\exists (a,b) \in U$ tq $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ et $f(a,b) = 0$

Alors $\exists O$ vois de a et O' vois de b

~~et~~ $\phi : O \to O'$ de classe $\mathcal{C}^1$

tq $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$ $\forall x \in O$, $\forall y \in O'$

avec $\phi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x)) \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))$

(8) Dire comment montrer ce résultat gle

si $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ et U ouvert
$(x,y) \mapsto f(x,y)$

si $\exists (a,b) \in U$ tq $f(a,b) = 0$

et $Jf_a(a,b)$ isom où $f_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $y \mapsto f(a,y)$

Alors $\exists O$ ouvert vois de a
$\exists O'$ vois de b et $\phi : O \to O'$ de classe $\mathcal{C}^1$

tq $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$ $\forall x \in O$, $\forall y \in O'$

$d\phi(x) = -df_y(x,\phi(x))^{-1} \circ df_x(x,\phi(x))$ $\forall x \in O$

9) Application : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

et $A = \{(x,y) \in U \text{ tq } f(x,y) = 0\}$

Soit $(a,b) \in A$ tq $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

mq $(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

est l'éq de la tg à A au pt (a,b)

Thème 5 : Extremas liés

Soit U ouvert et $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } g(x,y) = 0\}$

où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

on suppose que $f_{|A}$ admet un extremum en un pt $(a,b) \in A$ tq $dg(a,b) \neq 0$

par exple $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$

1) Justifier l'existence de $r > 0$ et $\varphi : \underbrace{]a-r, a+r[}_{I=} \to \underbrace{]b-r, b+r[}_{=J}$ de classe $\mathcal{C}^1$

tq $g(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ $\forall x \in I$ $\forall y \in J$

2) Mq $h : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ admet un extremum local en $a \in I$

3) En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \varphi'(a)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

4) En déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $df(a) = \lambda\, dg(a)$

5) Dire comment généraliser ce résultat pour $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$