

Espace Préhilbertiens Devoir Sur Table

Thème : Determinants de Gram

Soit E euclidien tq $\dim E = n \geq 2$

Soit $\mathcal{E} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille d'elts de E

on pose $G(x_1, \dots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p} \in M_p(\mathbb{R})$

matrice de Gram associée à
la famille $\mathcal{E}$

I) Preliminaires

1) On suppose $\mathcal{E}$ est liée, montrer que $\det(G(\mathcal{E})) = 0$

2) Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E

on pose $A = P_{\beta \rightarrow \mathcal{E}}$ matrice où on exprime
 $\mathcal{E}$ dans β

i) Mg $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ tq $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$

ii) En deduire que $G = {}^t A \cdot A$
ou $G = G(x_1, \dots, x_p)$

iii) Mg $\text{Ker } G = \text{Ker } A$

iv) En deduire que $\text{rg}(\mathcal{E}) = \text{rg}(G)$

3) En deduire que $\mathcal{E}$ libre $\Rightarrow \det G \neq 0$
Conclusion

(1)

II) Gram et Calcul de distance

Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ un sev de E tq

$\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p)$ libe donc $\dim F = p$

1) Mg $\text{sp}_2(G) \subset]0, +\infty[$ ou $G = G(x_1, \dots, x_p)$
 indic : utiliser I-2.ii)

2) En deduire que $\det G > 0$

3) Soit $x \in E$ fixe

$$\text{i) Mg } d(x, F)^2 = \det(G(x_1, \dots, x_p, P_F(x))) + (\det G(x_1, \dots, x_p) \|P_F(x) - x\|)^2$$

$$= \det(G(x_1, \dots, x_p, x))$$

indic : utiliser la multilinéarité du det
 en raisonnant sur la dernière colonne

ii) Justifier que $\det G(x_1, \dots, x_p, P_F(x)) = 0$

$$\text{iii) En deduire que } d(x, F)^2 = \frac{\det(G(x_1, \dots, x_p, P_F(x)))}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$$

4) CNC 2019 : On pose $\Delta_n = \det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ tq $a_i \in \mathbb{R}$
 $b_j \in \mathbb{R}$ et $a_i + b_j \neq 0$

le CNC mg $\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} a_i + b_j}$

Donner $d(X^n, \mathcal{P}_{n-1}(X))$ pour $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$

(2)

Partie II : Qlq rapproches du thm de Bessel

on rappelle que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E

Alors $\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \quad \forall x \in E} \quad (*)$

1) Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de E venfant (*)
NB ici Card $\beta = n = \dim E$

i) Mg $\text{Vect}(\beta)^\perp = \{0\}$

ii) En deduire que β base de E

iii) Mg $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \quad \forall x, y \in E$

iv) En deduire que $G^\perp = G$ ou $G = G(e_1, \dots, e_n)$

v) Conclure que β BON de E

2) Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de venfant (*)
NB ici Card $\beta = p$

tg $\|e_i\| = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq p$

i) Mg $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

ii) En deduire que β est libre

iii) Mg $\text{Vect}(\beta)^\perp = \{0\}$ puis que β base de E

iv) En deduire que $n = p$ puis que β BON de E

FIN