

Devoir Maison

Polynômes et applications linéaires

EXERCICE 1

$n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel fixé.

On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - nXP.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout entier $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose : $P_i = (X + 1)^i (X - 1)^{n-i}$.
Montrer que $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\varphi(P_i)$ en fonction de P_i .
3. Déterminer l'image et le noyau de φ .
Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur n) pour que φ soit bijective.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et a et b sont deux réels *distincts*.

1. *Un résultat préliminaire*
Soit u un endomorphisme de E .
Montrer que :

$$\text{Ker}(u^2 - (a + b)u + ab\text{Id}_E) = \text{Ker}(u - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - b\text{Id}_E).$$

(on rappelle que u^2 désigne l'endomorphisme $u \circ u$, et Id_E désigne l'application identique de E).

p, q, f sont maintenant trois endomorphismes de E vérifiant les trois relations :

$$p + q = \text{Id}_E \quad ; \quad ap + bq = f \quad ; \quad a^2p + b^2q = f^2.$$

On suppose également que f n'est pas une homothétie.

2. Montrer que $E = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - b\text{Id}_E)$.
3. a) Établir que $p \circ q = q \circ p = 0$.
b) Montrer que p et q sont des projecteurs non nuls.
c) Préciser leurs images et leurs noyaux.

On suppose désormais $ab \neq 0$.

4. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de a, b, p, q .
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a^n p + b^n q,$$

puis montrer que cette relation se généralise à $n \in \mathbb{Z}$.

6. Dans cette dernière question, $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les applications :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x + y) \end{cases} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (2x + y, x + 2y) \end{cases}.$$

On admettra qu'il s'agit bien d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

- a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $h^k = 2^{k-1}h$.
- b) En déduire l'expression de f^n en fonction de Id_E et de h pour $n \in \mathbb{N}$.
- c) Montrer qu'il existe deux réels distincts a et b que l'on déterminera ($a < b$) tels que :
$$(f - a\text{Id}_E) \circ (f - b\text{Id}_E) = 0.$$
- d) Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q que l'on exprimera en fonction de Id_E et de h tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a^n p + b^n q.$$

PROBLÈME (extrait de CENTRALE PC 2016)

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble $[a; b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1} . On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ est une base.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\text{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P , c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\frac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f: E \rightarrow E$, on définit l'application $f^k: E \rightarrow E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f^{k+1} = f \circ f^k.$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p .

Puisque nous n'avons pas encore revu les matrices en cours, les questions

I.A.3), I.A.4), I.A.6), I.A.7), I.A.8) et III.A.3)

sont facultatives.

I. L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A. L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1). \end{aligned}$$

I.A.1) Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\text{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.

I.A.2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P .

I.A.3) Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j .

I.A.4) Question réservée aux 5/2

Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ . L'application τ est-elle diagonalisable ?

I.A.5) Montrer que l'application τ est bijective et préciser τ^{-1} . L'expression de τ^j trouvée à la question **I.A.2)** pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

I.A.6) Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j .

I.A.7) On se donne une suite réelle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j. \quad (\text{I.1})$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ (que l'on exprimera en fonction de M) telle que :

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

I.A.8) En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j. \quad (\text{I.2})$$

I.A.9) On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

I.B. L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

I.B.1) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\text{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.

I.B.2) En déduire le noyau $\text{Ker}(\delta)$ et l'image $\text{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ .

I.B.3) Plus généralement, pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, montrer les égalités suivantes :

$$\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \quad \text{et} \quad \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (\text{I.3})$$

I.B.4) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$.

I.B.5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0. \quad (\text{I.4})$$

I.B.6) Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

- a) Montrer que u et δ^2 commutent.
- b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u .
- c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Conclure.

I.B.7) Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ .

- a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leq n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
- b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

II. Une application en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; k \rrbracket$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

II.A. Quelques cas particuliers

II.A.1) Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?

II.A.2) Déterminer $S(n, n)$.

II.A.3) Déterminer $S(n+1, n)$.

II.B. Recherche d'une expression générale

II.B.1) Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$?

II.B.2) Pour $p \geq n$, établir la formule :

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k) \quad (\text{II.5})$$

où $S(p, 0) = 0$ par convention.

II.B.3) En déduire, à l'aide de **I.A.8)**, une expression de $S(p, n)$ pour $p \geq n$.

II.B.4) En relisant la question **I.B.5)**, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

II.C.

Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

III. Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \quad \text{pour } k \in \llbracket 1; n \rrbracket. \end{cases}$$

III.A. Généralités

III.A.1) Montrer que la famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.A.2) Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1} .

III.A.3) La matrice M définie à la question I.A.3) et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

III.A.4) Montrer que, pour $k, \ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

III.A.5) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k.$$

III.B. Étude d'un exemple

III.B.1) Donner les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

III.B.2) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que :

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7.$$

III.B.3) Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

III.C. Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

III.C.2) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

III.C.3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

III.C.4) Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont entières.

III.C.5) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. étudier la réciproque.



EXERCICE 1

1. • La linéarité de φ se vérifie facilement :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \varphi(\lambda P + Q) &= (X^2 - 1)(\lambda P + Q)' - nX(\lambda P + Q) \\ &= \lambda[(X^2 - 1)P' - nXP] + [(X^2 - 1)Q' - nXQ] \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On peut écrire : $P = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où :

$$\varphi(P) = a_n[(X^2 - 1)nX^{n-1} - nX^{n+1}] + (X^2 - 1)Q' - nXQ = -na_n X^{n-1} + \underbrace{(X^2 - 1)Q' - nXQ}_{\text{degré} \leq n}$$

est de degré $\leq n$, c'est-à-dire $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. • Les polynômes P_i pour $0 \leq i \leq n$ sont $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$; pour prouver qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit donc de prouver qu'ils forment une famille libre.

Pour cela, procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, la famille est formée des deux polynômes $\{X - 1, X + 1\}$ dans $\mathbb{R}_1[X]$. Cette famille est libre puisque la relation $\lambda_0(X - 1) + \lambda_1(X + 1) = 0$ implique $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ (en faisant $X = 1$ puis $X = -1$).
- Supposons donc la propriété démontrée à l'ordre $n - 1$ ($n \geq 2$), c'est-à-dire que la famille des polynômes $((X + 1)^i(X - 1)^{n-1-i})_{0 \leq i \leq n-1}$ est libre.

Soient alors $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ $n+1$ réels tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = 0$. Cela s'écrit aussi :

$$\lambda_0(X - 1)^n + \lambda_1(X + 1)(X - 1)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1}(X + 1)^{n-1}(X - 1) + \lambda_n(X + 1)^n = 0 \quad (*)$$

Pour $X = 1$ on obtient $\lambda_n 2^n = 0$ d'où $\lambda_n = 0$. La relation $(*)$ devient donc :

$$(X - 1)[\lambda_0(X - 1)^{n-1} + \lambda_1(X + 1)(X - 1)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-2}(X + 1)^{n-2}(X - 1) + \lambda_{n-1}(X + 1)^{n-1}] = 0$$

et l'anneau $\mathbb{R}[X]$ étant intègre on en déduit :

$$\lambda_0(X - 1)^{n-1} + \lambda_1(X + 1)(X - 1)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-2}(X + 1)^{n-2}(X - 1) + \lambda_{n-1}(X + 1)^{n-1} = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, cela implique $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

On a donc démontré que la famille des polynômes $((X + 1)^i(X - 1)^{n-i})_{0 \leq i \leq n}$ est libre, c'est-à-dire la propriété à l'ordre n . Cela achève la récurrence. On a ainsi démontré :

la famille des polynômes $((X + 1)^i(X - 1)^{n-i})_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(P_i) &= (X - 1)(X + 1)[i(X + 1)^{i-1}(X - 1)^{n-i} + (n - i)(X + 1)^i(X - 1)^{n-i-1}] - nXP_i \\ &= i(X - 1)P_i + (n - i)(X + 1)P_i - nXP_i = (n - 2i)P_i.\end{aligned}$$

Remarque pour les 5/2 : on a ainsi déterminé des valeurs propres et des vecteurs propres de φ .

3. D'après le cours, puisque $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on sait que $\text{Im } \varphi$ est le sous-espace vectoriel engendré par les polynômes $\varphi(P_i)$. Deux cas se présentent :

- n impair : dans ce cas, pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $n - 2i$ n'est pas nul, donc la famille $(\varphi(P_i))_{0 \leq i \leq n}$ est encore une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans ce cas, φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (puisque transforme une base en une base).

- n pair : dans ce cas, $\text{Im } \varphi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par les n polynômes P_i pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{\frac{n}{2}\}$. Ce sous-espace est de dimension n (puisque la famille (P_i) est libre) ; d'après le théorème du rang, $\text{Ker } \varphi$ est donc de dimension 1, et, puisque $\varphi(P_{n/2}) = 0$, $\text{Ker } \varphi$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P_{n/2} = (X^2 - 1)^{n/2}$.

EXERCICE 2

1. Un résultat préliminaire

- Déjà, les deux sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u - a\text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u - b\text{Id}_E)$ sont en somme directe : en effet, si $x \in \text{Ker}(u - a\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(u - b\text{Id}_E)$, alors $(u - a\text{Id}_E)(x) = (u - b\text{Id}_E)(x) = 0$ soit $u(x) = ax$ et $u(x) = bx$. Puisque $a \neq b$, l'égalité $ax = bx$ implique $x = 0$, donc $\text{Ker}(u - a\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(u - b\text{Id}_E) = \{0_E\}$.
- On remarque que $u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E = (u - b\text{Id}_E) \circ (u - a\text{Id}_E)$ donc $\text{Ker}(u - a\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E)$; de même, l'égalité $u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E = (u - a\text{Id}_E) \circ (u - b\text{Id}_E)$ implique $\text{Ker}(u - b\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E)$. On en déduit : $\text{Ker}(u - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - b\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E)$.
- Démontrons l'inclusion réciproque, et soit $x \in \text{Ker}(u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E)$. On « remarque » que x peut s'écrire :

$$x = \frac{1}{a-b} [(u - b\text{Id}_E)(x) - (u - a\text{Id}_E)(x)].$$

Posons $x_1 = \frac{1}{a-b}(u - b\text{Id}_E)(x)$ et $x_2 = -\frac{1}{a-b}(u - a\text{Id}_E)(x)$, de sorte que $x = x_1 + x_2$. On a alors :

$$(u - a\text{Id}_E)(x_1) = \frac{1}{a-b}(u - a\text{Id}_E) \circ (u - b\text{Id}_E)(x) = \frac{1}{a-b}(u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E)(x) = 0$$

compte tenu de l'hypothèse faite sur x , donc x_1 appartient à $\text{Ker}(u - a\text{Id}_E)$ et on démontre de la même façon que x_2 appartient à $\text{Ker}(u - b\text{Id}_E)$.

Cela prouve que $\text{Ker}(u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u - a\text{Id}_E) + \text{Ker}(u - b\text{Id}_E)$, d'où l'égalité de ces deux sous-espaces vectoriels et finalement :

$$\boxed{\text{Ker}(u^2 - (a+b)u + ab\text{Id}_E) = \text{Ker}(u - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - b\text{Id}_E).}$$

2. On calcule :

$$f^2 - (a+b)f + ab\text{Id}_E = a^2p + b^2q - (a+b)(ap + bq) + ab\text{Id}_E = ab(p+q) - ab\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

donc $\text{Ker}(f^2 - (a+b)f + ab\text{Id}_E) = E$ et le résultat demandé découle directement de la question préliminaire.

3. a) On a le système :
$$\begin{cases} p + q = \text{Id}_E & (1) \\ ap + bq = f & (2) \end{cases}$$

En faisant $(2) - b(1)$ on trouve $p = \frac{1}{a-b}(f - b\text{Id}_E)$ et en faisant $(2) - a(1)$ on trouve $q = \frac{1}{b-a}(f - a\text{Id}_E)$. On en déduit :

$$q \circ p = -\frac{1}{(b-a)^2}(f - a\text{Id}_E) \circ (f - b\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

d'après un calcul déjà fait, et puisque $f - a\text{Id}_E$ et $f - b\text{Id}_E$ commutent, on a aussi $p \circ q = 0$.

- b) En reprenant l'expression trouvée ci-dessus :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{(a-b)^2}(f - b\text{Id}_E)^2 = \frac{1}{(a-b)^2}(f^2 - 2bf + b^2\text{Id}_E) \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}(a^2p + b^2q - 2b(ap + bq) + b^2\text{Id}_E) \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}(a^2p + b^2(\text{Id}_E - p) - 2b(ap + b(\text{Id}_E - p)) + b^2\text{Id}_E) = \frac{1}{(a-b)^2}((a-b)^2p) = p \end{aligned}$$

donc $\boxed{p \text{ est un projecteur, et il en est de même de } q.}$

Ces projecteurs sont non nuls puisque f n'est pas une homothétie (donc $f \neq a\text{Id}_E$ et $f \neq b\text{Id}_E$).

- c) Puisque p et q sont deux projecteurs associés, $\text{Ker } p = \text{Im } q$ et $\text{Ker } q = \text{Im } p$.

Puisque $p = \frac{1}{a-b}(f - b\text{Id}_E)$, $\text{Ker } p = \text{Ker}(f - b\text{Id}_E)$ et on a de même $\text{Ker } q = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)$.

4. D'après un calcul déjà fait :

$$f^2 - (a+b)f + ab\text{Id}_E = 0$$

donc puisque $ab \neq 0$ on a

$$\text{Id}_E = -\frac{1}{ab} (f^2 - (a+b)f) = -\frac{1}{ab} (f - (a+b)\text{Id}_E) \circ f$$

ce qui s'écrit $g \circ f = \text{Id}_E$ avec $g = -\frac{1}{ab} (f - (a+b)\text{Id}_E)$. Il est clair que g commute avec f donc on a aussi $f \circ g = \text{Id}_E$, ce qui prouve que f est inversible et que :

$$f^{-1} = g = -\frac{1}{ab} (f - (a+b)\text{Id}_E) = -\frac{1}{ab} (ap + bq - (a+b)\text{Id}_E) = \frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q.$$

5. • La propriété $f^n = a^n p + b^n q$ peut se démontrer par récurrence sur n , ou, mieux, à l'aide de la formule du binôme.

En effet, puisque p et q commutent, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^n = (ap + bq)^n = a^n p^n + b^n q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Or $p^n = p$ et $q^n = q$ car ce sont des projecteurs et pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $p^k q^{n-k} = 0$ (car $pq = 0$), ce qui donne le résultat demandé pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ce résultat demeure vrai pour $n = 0$ puisque $p + q = \text{Id}_E$.

• Puisque $f^{-1} = a^{-1}p + b^{-1}q$, le même calcul donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f^{-n} = a^{-n}p + b^{-n}q$, donc la formule reste vraie pour n entier négatif.

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, f^n = a^n p + b^n q.}$$

6. a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$h^2(x, y) = h(x + y, x + y) = (x + y + x + y, x + y + x + y) = 2(x + y, x + y) = 2h(x, y)$$

soit $h^2 = 2h$, et on démontre alors facilement la relation demandée par récurrence sur k .

b) On remarque que $f = \text{Id}_E + h$ donc en utilisant la formule du binôme (Id_E et h commutent !), on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f^n &= (\text{Id}_E + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k = \text{Id}_E + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k \\ &= \text{Id}_E + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} \right) h = \text{Id}_E + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - 1 \right) h \\ &= \boxed{\text{Id}_E + \frac{3^n - 1}{2} h}, \end{aligned}$$

cette dernière formule restant vraie pour $n = 0$.

c) D'après la question précédente, $f^2 = \text{Id}_E + 4h = \text{Id}_E + 4(f - \text{Id}_E)$ donc $f^2 - 4f + 3\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$, c'est-à-dire $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 3\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a donc : $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3.}$

d) En s'inspirant des calculs faits à la question 3.a), posons : $p = \frac{1}{a-b}(f - b\text{Id}_E) = \text{Id}_E - \frac{h}{2}$ et $q = \frac{1}{b-a}(f - a\text{Id}_E) = \frac{h}{2}$.

Les relations $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$ et $f^n = a^n p + b^n q$ sont alors immédiates compte tenu des calculs précédents.

PROBLÈME (extrait de CENTRALE PC 2016)

I. L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A. L'opérateur de translation

I.A.1) Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (ainsi $a_d \neq 0$).
Alors, $\tau(P)$ s'écrit :

$$\tau(P) = P(X+1) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d X^d + \underbrace{(da_d + a_{d-1})X^{d-1}}_{0 \text{ si } d=0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k}_{0 \text{ si } d \leq 1}.$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P).$$

I.A.2) Une récurrence facile donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(P) = P(X+k).$$

En effet, $\tau^0(P) = P$

et si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.

I.A.3) D'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i.$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I.A.4) La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$. Ainsi :

$$\text{Sp}(\tau) = \{1\}.$$

Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité ce qui n'est pas le cas. Donc :

$$\tau \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

I.A.5) 0 n'étant pas valeur propre de τ ,

$$\tau \text{ est bijective.}$$

(on peut aussi dire que la matrice M de τ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls)

Puis si on considère $\bar{\tau}: \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$, on montre comme en **I.A.1)** qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \bar{\tau} = \bar{\tau} \circ \tau = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Donc :

$$\tau^{-1}(P) = P(X-1).$$

Puis, comme pour la question **I.A.2)**, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P) = P(X-k)$.
Donc la formule est toujours vraie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P) = P(X+k).$$

I.A.6) En utilisant encore la formule du binôme, comme en **I.A.3)**, obtient :

$$\forall j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i.$$

D'où l'on déduit :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I.A.7) La $(k+1)^e$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est :

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j.$$

$$\text{On en déduit (après changement d'indice) : } Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour } j \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc :

$$Q = {}^t M.$$

I.A.8) M est inversible, donc $Q = {}^t M$ également et $Q^{-1} = ({}^t M)^{-1} = {}^t (M^{-1})$.

Or : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = {}^t (M^{-1}) \times V$.

La $(k+1)^e$ ligne de ce calcul donne alors :

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} ({}^t (M^{-1}))_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} (M^{-1})_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^n (M^{-1})_{j+1,k+1} v_j.$$

On a donc bien :

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.$$

I.A.9) On a, lorsque $u_k = \lambda^k$ pour tout k :

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k,$$

et on vérifie bien :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1) - 1)^k = u_k.$$

I.B. L'opérateur de différence

I.B.1) Avec les mêmes notations qu'en **I.A.1)**, avec P non constant c'est-à-dire $d \geq 1$ on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = da_d X^{d-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k}_{0 \text{ si } d=1}.$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\text{si } P \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P).$$

I.B.2) D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Par contraposition, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.

Réciproquement, si P est constant, on vérifie immédiatement $\delta(P) = 0$. Donc :

$$\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X].$$

La question précédente montre aussi que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Or d'après le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(\delta)) = n+1 - \dim(\text{Ker}(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.

Donc :

$$\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

I.B.3) • Si l'on suppose $\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$ alors :

$$P \in \text{Ker}(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X],$$

donc :

$$P \in \text{Ker}(\delta^{j+1}) \iff \deg(\delta(P)) \leq j-1 \iff \deg(P) \leq (j-1)+1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X].$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X].}$$

- Si $P \in \text{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$. Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leq n - j$.
Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X].}$$

I.B.4) Par définition, on a $\delta = \tau - \text{Id}$, et puisque τ et Id commutent, la formule du binôme donne directement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \delta^k = (\tau - \text{Id})^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j.}$$

I.B.5) Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Ker}(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc d'après le calcul précédent (avec $k = n$) :

$$0 = \delta^n(P) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.}$$

I.B.6) a) $u \circ \delta^2 = u \circ (u^2 \circ u^2) = u^5 = (u^2 \circ u^2) \circ u = \delta^2 \circ u$. Donc :

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent.}}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \text{Ker } \delta^2$, alors :

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0,$$

donc $u(P) \in \text{Ker}(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$, ce qui est contradictoire avec $ab = 1$. Donc :

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Argument plus savant et plus joli : si $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^4 = 0$ donc A est nilpotente ; or l'indice de nilpotence d'une matrice carrée d'ordre 2 est nécessairement inférieur ou égal à 2 ; on devrait donc avoir $A^2 = 0$, contradiction.

- d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u , notons $\tilde{u} : \begin{cases} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto u(P) \end{cases}$ l'endomorphisme induit par u .
 Considérons alors A , la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.
 Alors A^2 est égale à la matrice de δ dans cette même base c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (car $\delta(P_1) = 0$ et $\delta(P_2) = 1 = P_1$).
 D'après la question précédente, ceci est impossible. Donc :

Il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u^2 = \delta$.

I.B.7) a) On a vu (question **I.B.3**) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$ (si $d \geq i$).

Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de degrés échelonnés de d à 0. D'après le cours :

C'est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ .

Si $P \in V$ est de degré d , alors $\delta^i(P) \in V$ pour tout i et donc $\mathbb{R}_d[X] = \text{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) \subset V$.

Il reste à montrer l'égalité.

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.

Notons $(e_0, \dots, e_d)$ une base de V . Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d , car sinon, la famille $(e_0, \dots, e_d)$ serait une famille libre de $d+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ qui est de dimension d .

Donc il existe P dans V de degré $r \geq d$.

Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \text{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d+1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

il existe $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$

II. Une application en combinatoire

II.A. Quelques cas particuliers

II.A.1) Si φ est une surjection de E sur F , alors nécessairement $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$. Donc :

si $n > p$, alors $S(p, n) = 0$.

II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n n'est en fait une bijection.
 Donc :

$S(n, n) = n!$.

II.A.3) Les surjections de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ sont entièrement déterminées (et de manière unique) par :

- le choix de deux éléments de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités pour ces deux éléments, et n possibilités pour l'image;
- puis la mise en relation bijective des $n-1$ autres éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les $n-1$ autres éléments de l'ensemble de départ : $(n-1)!$ possibilités.

Le cardinal recherché est donc le produit :

$$S(n+1, n) = n \binom{n+1}{2} (n-1)! = \frac{n \times (n+1)!}{2}.$$

II.B. Recherche d'une expression générale

II.B.1) Une application de $\llbracket 1; p \rrbracket$ sur un $\llbracket 1; n \rrbracket$ est parfaitement définie et de manière unique par la donnée pour chacun des p éléments de $\llbracket 1; p \rrbracket$ d'un unique élément de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Donc pour chacun des p éléments de $\llbracket 1; p \rrbracket$, il y a n possibilités.

Le cardinal recherché est donc le produit :

le nombre d'applications de $\llbracket 1; p \rrbracket$ sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ est donc $n \times n \times \dots \times n = n^p$.

II.B.2) Notons $I_k = \{\varphi: \llbracket 1; p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket \mid \text{Card}(\text{Im } \varphi) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \text{Card}(I_k).$$

Il reste à dénombrer I_k . Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées (et de manière unique) par :

- le choix des k éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui forment l'image $\varphi(\llbracket 1; p \rrbracket) : \binom{n}{k}$ possibilités ;
- puis le choix d'une surjection de $\llbracket 1; p \rrbracket$ sur l'ensemble $\text{Im } \varphi$ à k éléments : $S(p, k)$ possibilités.

Le cardinal recherché est donc le produit : $\text{Card}(I_k) = \binom{n}{k} \times S(p, k)$ et finalement :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

(avec la convention $S(p, 0) = 0$).

II.B.3) On applique alors la formule d'inversion trouvée en **I.A.8)** :

$$v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p, k)$, donc :

$$\forall p \geq n, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

II.B.4) Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après **I.B.5)**,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n).$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

II.C) Avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}.$$

III. Étude d'une famille de polynômes

III.A. Généralités

III.A.1) Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\deg(H_k) = k$.

Donc la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une famille de degrés distincts, donc elle est libre.

Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc ;

$$(H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

III.A.2) $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$. Ensuite, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \delta(H_k) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left((X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - (X-k+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) ((X+1) - (X-k+1)) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \times k \\ &= H_{k-1}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in [1, n], \delta(H_k) = H_{k-1}.$$

III.A.3) Comme $\delta = \tau - \text{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent,

$$M \text{ et } M' \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes).}$$

III.A.4) Pour tous $k, \ell \in [1; n]$, on a (par récurrence pour $\ell \geq k$) :

$$\delta^k(H_\ell) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si } \ell \geq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or pour $m \neq 0$ $H_m(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$ donc :

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

III.A.5) Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell$.

On en déduit, par linéarité;

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k,$$

donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k.$$

III.B. Étude d'un exemple

III.B.1) Notons $Q = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$. D'après la question précédente, les coordonnées de Q dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$ sont les $\delta^k(Q)(0)$ pour $0 \leq k \leq 3$. On calcule :

$$\delta(Q) = Q(X+1) - Q(X) = 3X^2 + 7X + 8;$$

$$\delta^2(Q) = \delta(Q)(X+1) - \delta(Q)(X) = 6X + 10$$

$$\delta^3(Q) = \delta^2(Q)(X+1) - \delta^2(Q) = 6.$$

On a donc :

$$Q = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0.$$

III.B.2) Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0.$$

III.B.3) • Cherchons d'abord une solution particulière $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à l'équation proposée.

On a vu que pour un polynôme P , $\delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.

Donc avec P tel que $\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ et $v_k = P(k)$, la suite v convient.

Une solution particulière est donc donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k = 6H_5(k) + 10H_4(k) + 8H_3(k) + 7H_2(k) = 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2},$$

avec la convention habituelle : $\binom{k}{i} = 0$ si $i > k$ (voir détails des calculs à la question **III.C.1**)).

• Une suite quelconque $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est alors solution de l'équation proposée si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, (u-v)_{k+2} - 2(u-v)_{k+1} + (u-v)_k &= (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k) \\ &= (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que la suite $w = u - v$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant l'équation homogène :

$$\forall k \in \mathbb{N}, w_{k+2} - 2w_{k+1} + w_k = 0.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, donc il existe des constantes réelles a et b telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, w_k = a + bk.$$

- Enfin, on obtient la solution générale de l'équation proposée en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène la solution particulière trouvée plus haut :

u est solution si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = a + bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}$.

III.C. Polynômes à valeurs entières

III.C.1) On distingue les 3 cas proposés (on suppose bien sûr $n \in \mathbb{N}^*$).

- Si $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, alors $H_n(k) = 0$ puisque k figure parmi les racines de $H_n = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X - j)$.
- Si $k \geq n$ alors :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k - j) = \frac{1}{n!} k(k-1) \cdots (k-n+1) = \frac{1}{n!} \frac{k!}{(k-n)!} = \binom{k}{n}.$$

- Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :

$$\begin{aligned} H_n(k) &= \frac{1}{n!} k(k-1) \cdots (k-(n-1)) = \frac{1}{n!} (-p)(-p-1) \cdots (-p-(n-1)) \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n \binom{p+n-1}{n}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ (-1)^n \binom{n-1-k}{n} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

III.C.2) Tous les coefficients binomiaux sont des nombres entiers (puisque'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$$H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}.$$

III.C.3) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$. Donc :

Si P est à valeurs entières sur les entiers, il en est de même pour $\delta(P)$.

III.C.4) • Si P est à valeurs entières sur les entiers, alors par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$ avec la question précédente, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^i(P)(k) \in \mathbb{Z}$.

En particulier $\delta^i(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers.

- Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers, alors $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$ avec

$$a_i \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } i, \text{ puis } P(k) = \sum_{i=0}^d a_i H_i(k) \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ avec la question III.C.2).}$$

En conclusion :

$P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers ssi ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont entières.

III.C.5) Supposons que P , de degré d , est à valeurs entières sur les entiers.

Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{k=0}^d a_k H_k$.

Donc :

$$d!P = \sum_{k=0}^d a_k \times d!H_k = \sum_{k=0}^d \left(a_k \times \frac{d!}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \right) = \sum_{i=0}^d \left(a_k \times d(d-1) \cdots (k+1) \times \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \right).$$

$d!P$ est bien un polynôme à coefficients entiers.

Comme le montre l'exemple du polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré 2 : on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

La réciproque est donc fausse.