My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

DM : Espaces Préhilbertiens

Extraits Mines (Avec qlq indications)

Mines 2017

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $\langle x, y\rangle = 0$ implique $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$.

   Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$.)

   En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

Mines 2016

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15. Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices ***symétriques réelles****.*

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

16. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A,D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que $\|A - B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2$.

Indication : utiliser inteligement le thm spectral et la qst 15

17. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$ est bistochastique et que

$$\|A - B\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} R_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$

où $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \dots, \lambda_n(B)$ celles de B.

Indication : Justifier que $\mathrm{D_A} = \mathrm{diag}(\lambda_1(\mathrm{A}), \dots, \lambda_n(\mathrm{A}))$ et $\mathrm{D_B} = \mathrm{diag}(\lambda_1(\mathrm{B}), \dots, \lambda_n(\mathrm{B}))$

18. En déduire que
$$\min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leqslant \|A - B\|^2$$
où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Indication : On admet ce résultat traité dans la question 14

14. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

Mines 2015 Opérateur de Volterra et équations différentielles

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

A. Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E défini par les formules :

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad V^*(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$.

2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

Exo Défi

Preparation Oral Mines
Extrait 2024

Ex 1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Mq $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\operatorname{rg} M = 1$ et $AM = MB$

$\Leftrightarrow \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \neq \emptyset$