MP* 1 (Rabat)

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

DM (EV. Préhilbertiens)

Centrales 2013, avec qlq indications

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

I.1 : Racine carré d'un endomorphisme autoadjoint defini positif

I.A – On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

I.A.1) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.A.2) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.B – Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.

I.B.1) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ que l'on déterminera.

Indication : Montrer que $v = \sqrt{\lambda} id_{Ker(u-\lambda id)}$.

I.B.2) En déduire v, puis conclure.

Indication : Utiliser que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker(u - \lambda id)$

I.B.3) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.

Indication : Justifier, puis utiliser le résultat suivant

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes deux à deux de u, alors il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $\forall k \in [[1,p]], Q(\lambda_k) = Q(\sqrt{\lambda_k})$ à savoir $Q = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\lambda_k} L_k$ où $L_1, ..., L_p$ les polynômes de Lagrange donnés par $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{x_i - x_j}$.

I.2 : Existence et unicité de la décoposition polaire pour une matrie inversible

I.C – Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

I.C.1) Montrer que ${}^t\!AA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.C.2) En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

Indication 1 : Pour l'existence, prendre $O = AS^{-1}$

Indication 2 : Pour l'unicité, utiliser I.B pour l'endomoprhisme canoniquement associé à la matrice ${}^t\!AA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.C.3) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Indication : Calculer d'abord ${}^t\!AA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II Deux applications

II.A – Première application

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n, inversible, à coefficients complexes, telle que $U\,{}^t\overline{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\overline{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U.

II.A.1) Justifier que ${}^tA = U({}^tB)U^{-1}$.

II.A.2) On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P\,{}^tBP^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = X + \mathrm{i}Y$.

a) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) Conclure.

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$, avec $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis que $BS = SB$.

b) En déduire qu'il existe $O \in \mathrm{O}(n)$ tel que $A = OB^tO$.

II.B – Seconde application

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ au système

$$(*) : \begin{cases} {}^tAA + {}^tXX = I_n \\ {}^tAX - {}^tXA = 0_n \end{cases}$$

II.B.1) Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

II.B.2) On suppose dans cette question que les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

a) Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathrm{O}(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Déterminer H.

c) Montrer l'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $(*)$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.