

DM Prehilbertiens

Thème : Endom Normaux

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un $\mathbb{R}$ -euclidien

$\dim E = n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$

u est dit endom normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

Partie I : Préliminaires

1) Justifier les résultats suivants:

i) tout endom symétrique est normal

ii) " tout endom orthogonal est normal

2) On suppose ici $\dim E = 2$ et u endom normal

Ma $M(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tel que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$
B dans toute base de E

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endom normal et F un sev stable par u

i) Ma $\rightarrow$ B base de E tq $M(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

ii) Vérifier que $A^t A + B^t B = {}^t A A$

iii) En déduire que $\text{Tr}(B^t B) = 0$ puis que $B = 0$

4) En déduire ce résultat : si u endom normal

si F stable par u , alors

i) $F^\perp$ stable par u

ii) F stable par u^*

iii) $F^\perp$ stable par u^*

Démonstration : On pourra utiliser ce résultat du cours

$$\boxed{\underset{B}{M}(u^*) = {}^t \underset{B}{M}(u)}$$

5) Soit u endom normal

i) Montrer $\|u(x)\| = \|u^*(x)\| \quad \forall x \in E$

ii) En déduire que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^*$

iii) En déduire que $\text{sp}_{\mathbb{R}}(u) = \text{sp}_{\mathbb{R}}(u^*)$
et que $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*) \quad \forall \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(u)$

iv) Soit $\lambda, \mu \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(u)$ tq $\lambda \neq \mu$

Montrer $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$

6) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Mg les assertions suivantes sont équivalent

i) $u \circ u^* = u^* \circ u$

ii) $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$

iii) $\|u(x)\| = \|u^*(x)\| \quad \forall x \in E$

Indice : pour iii) $\Rightarrow$ i Mg $\langle u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x), y \rangle = 0$
 $\forall x \in E, \forall y \in E$

Partie II : Reduction d'un endomorphisme normal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal. On pose

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \text{ et } F = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$$

1) Justifier que F et $F^\perp$ sont stables par u

2) En déduire que $\exists \mathcal{B}$ base de E tq

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \text{ où } D \text{ est diagonale}$$

3) Justifier que $u|_{F^\perp}$ est normal et
 que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u|_{F^\perp}) = \emptyset$

4) En déduire que $\chi_{u|_{F^\perp}}(x) = \prod_{k=0}^r (x^2 + a_k x + b_k)^{d_k}$

5) En déduire que $\dim F^\perp$ est pair

avec $a_k^2 - 4b_k < 0$
 et $d_k \in \mathbb{N}^*$

avec
 $(x^2 + a_k x + b_k) \wedge (x^2 + a_j x + b_j) = 1$

(3/4)

6) On pose $F_k = \text{Ker}(u^2 + a_k u + b_k \text{id}_{F^\perp}) \subset F^\perp$ $1 \leq k \leq r$

i) Justifier que F_k sont tous stables par u

ii) " $F^\perp = \bigoplus_{k=1}^r F_k$

iii) En deduire que $M(u|_{F^\perp}) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix}$

où $\beta = \bigcup_{i=1}^r \beta_i$, β_i BON de F_i
BON de $F^\perp$

et $M_i = M(u|_{F_i})$

7) on pose $G_1 = \text{Ker}(u^2 + \alpha u + \beta \text{id}_{F_1}) \subset F_1$
Soit $x \in G_1$ fixe tq $x \neq 0$

i) Montrer que $\{x, u(x)\}$ est libre

ii) En deduire que $\square$ Vect $\{x, u(x)\}$ est un
ser stable par u et que $\dim G_1 = 2$

iii) En deduire que $M(u|_{G_1}) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$
BON

8) En deduire que $\exists \beta_i$ BON de F_i tq

$$M(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \text{ tq } A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & +\beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

9) Conclure que $\exists \beta$ BON de E tq

$$M(u) = \begin{pmatrix} D & & \\ & A_1 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix} \text{ où } D = \text{diagonale}$$

(4/4)

FIN