

Devoir Sur Table  
Réduction

Thème : Racine carrée d'une matrice

Soit  $A \in M_n(K)$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n \geq 2$ )

On se propose ici d'étudier l'existence et  
unicité de  $B \in M_n(K)$  tq  $B^2 = A$

en cas d'existence de  $B$ , on l'appelle une racine  
carrée de  $A$

" " " et unicité de  $B$ , on l'appelle la  
racine carrée de  $A$  et on la note  $\sqrt{A}$

Partie I : Préliminaires

1) i) Mg l'eq  $B^2 = -I_3$  n'admet pas de sol

ii) Que peut-on conclure

2) i) Calculer  $B^2$  où  $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

ii) Que peut-on conclure

3) i) Mg si  $B$  existe et  $B$  diagonalisable alors  $A$  l'est aussi

ii) Mg la réciproque n'est pas vraie

Indic: Considérez  $B$  de I-2.i

①

## Partie II : Cas diagonalisable

- i) on suppose ici que  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est diagonalisable
- ii) Mq  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists \mu \in \mathbb{C} \text{ tq } \lambda = \mu^2$
- iii) En deduire que  $\exists B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tq } B^2 = A$
- 2) Mq le resultat <sup>II.1</sup> est encore vrai si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  diagonalisable  
- avec  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$
- 3) le resultat II.2 est-il encore vrai si  
 $A \in M_n(\mathbb{R})$  avec  $A$  diagonalisable

## Partie III : Cas Symétrique définie positive

$A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite symétrique définie positive  
ssi  $\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ i.e. } {}^t A = A \\ {}^t X A X > 0 \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \text{ avec } X \neq 0 \end{array} \right.$   
on note alors  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On admet ici le résultat suivant

Thm spectral:  $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale  
tq  $A = P D P^{-1}$  avec  $P^{-1} = {}^t P$

- 1) Mq ce résultat n'est pas vraie pour  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$

indic: utiliser  $B$  de I.2.ii

- 2) Mq si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$   
Alors  ${}^t X D X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$

(2)

3) En deduire que  $\boxed{A \in \mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R}) \\ \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[ \end{cases}}$

4) En deduire que  $\boxed{\mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})}$

5) Soit  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  tq  $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$  et  $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$

i) Mg l'app  $\varphi: \mathbb{R}_{n-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un isom  
 $\varphi(x) \mapsto (\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n))$

ii) En deduire que  $\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}(x)$  tq  $\sqrt{\lambda_i} = Q(\lambda_i)$

iii) On pose  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

Mg  $\Delta = Q(D)$

6) Mg le resultat de II.5. <sup>iii)</sup> est encore valable si on enlève l'hypothèse  $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

7) Soit  $A \in \mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R})$  selon le thm spectral  
 $A = PDP^{-1}$  tq  $P^{-1} = {}^tP$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

i) Dire pourquoi  $\lambda_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

ii) On pose  $B = P\Delta P^{-1}$  où  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

Mg  $\boxed{\begin{aligned} B^2 &= A \\ B &\in \mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ B &= Q(A) \end{aligned}}$

iii) Que peut-on conclure

8) Soit  $A \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$ , on suppose qu'il existe une autre matrice  $C \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$  tq  $C^2 = A$

i) Mg  $AC = CA$

ii) En deduire que  $BC = CB$

iii) Justifier que  $(B-C)(B+C) = 0$

iv) Mg  $B+C \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$

v) En deduire que  $B+C \in GL_n(\mathbb{R})$

vi) Conclure que  $B=C$

9) Selon III-7 et III-8 on a montré que  
 $\forall A \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \exists ! B \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$  tq  $B^2 = A$   
 on pose  $B = \sqrt{A}$

i) Mg  $\sqrt{A}$  est inversible et que  $(\sqrt{A})^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$

ii) Mg  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \sqrt{A^k} = (\sqrt{A})^k$

iii) Not ouverte A-t-on

$$\sqrt{AA'} = \sqrt{A} \sqrt{A'} \quad \text{si} \quad A, A' \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Indic: Mg si  $AA' = A'A$  alors le résultat est vrai

(utiliser simultanément le thème : diagonalisable)

puis étudier la réciproque

FIN