

DM : EVN
Série Num

Extrait X 2011

Thème : Transformation d'Euler

Notation

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

on pose $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)$

Opérateur de différence finie

$$Eu_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u_n)_0$$

Transformée d'Euler en cas
de convergence

$(\Delta^p u_n)_0$: le 1^{er} terme de la suite $(\Delta^p u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{ou } \Delta^p = \underbrace{\Delta \circ \dots \circ \Delta}_{p \text{ fois}}$$

$$1) \text{ Mg } (\Delta^p u_n)_n = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$$

Indic : $D = T - \text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ ou $T: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

2) Soit $w: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive, non nulle
on pose $u_n = \int_0^1 t^n w(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Mg } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \text{ converge avec } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{w(t)}{1+t} dt$$

(1)

$$3) \text{ Mg } (-1)^p (\Delta^p u_n)_n > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Indic: Utiliser qot 1

$$4) \text{ Mg } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k w(t) dt$$

Indic: On pourra remarquer que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^k = \frac{1}{1+t}$$

$$5) \text{ En deduire que } \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u_n)_0 \text{ vgl}$$

$$\text{et que } \boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u_n)_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k}$$

6) Applications

$$\text{En deduire que } \ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

7) Une majoration de l'erreur (du reste)

$$\text{on pose } R_n(u_n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u_n)_0$$

$$\boxed{\text{Mg } |R_n(u_n)| \leq \frac{E(u_n)}{2^{n+1}}}$$

N.B: On a traité ici un cas particulier $u_n = \int_0^1 t^n w(t) dt$
 pour traiter le cas gél: voir X 2011
 pour une amélioration de la majoration du
 reste voir X 2021

② FIN