

DM EVN
Série Vect

Thème 0 : (Série de Van Neuman et App)

Partie I :

- 1) $M_n(\mathbb{R})$ ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$
- 2) M_n l'app $A \mapsto A^{-1}$ cont sur $G_n(\mathbb{R})$
- 3) $M_n(\mathbb{R})$ compact de $M_n(\mathbb{R})$
- 4) On rappelle que $\forall A \in G_n(\mathbb{R}), \exists! O \in O(n)$
 $\exists! S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A = OS$

(décomposition polaire)

$M_n \setminus \{A \in M_n(\mathbb{R}), \exists O \in O(n), \exists S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ tq } A = OS\}$
 A - t - m unitaire

- 5) $M_n(\mathbb{R})$ non convexe par arc
 $G_n(\mathbb{R})$ convexe par arc

Partie II : Soit E alg normé de dim finie

- 1) $M_n \forall x \in E$ tq $\|x\| < 1$ la série $\sum x^k$ converge
et que $1_E - x$ inversible avec $(1_E - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Dans la suite on pose $U(E) = \{x \in E \text{ tq } x \text{ inversible}\}$
on se propose de $M_n U(E)$ ouvert dans E

(1)

2) Soit $x_0 \in E$ fixé. Soit $x \in B(x_0, r)$ tq $r < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$

i) Justifier que $x \in B(x_0, r)$

indici : écrire $x = x_0 - (x_0 - x)$

ii) Conclure

3) on se propose dans cette qst de mg $f: U(E) \rightarrow U(E)$
 $x \mapsto x^{-1}$

est continue

Soit $x_0 \in E$. Soit $x \in B(x_0, r)$ tq $r < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$

i) Mg $\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \leq \frac{\|x_0^{-1}\|^2 \|h\|}{1 - \|x_0^{-1}\| \|h\|}$ où $h = x - x_0$

ii) Conclure

Exo Defi Oral Ming 2-21
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$
Mg A diagonale $\Leftrightarrow A$ diagonale

Thème 2 : Série Exps et App

Soit E algèbre normée de dim finie commutative

1) Mg la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ vgt pour tout $x \in E$

2) on pose $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Justifier que $\|e^x\| \leq e^{\|x\|}$

On admet dans la suite que $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
~~quand x, y sont~~

3) i) Mg $\|e^x - e^y\| \leq e^{\|x\|} (1 - e^{\|x-y\|})$ $\forall (x, y) \in E$

ii) En deduire que $x \mapsto e^x$ est continue

4) Soit $a \in E$ fixé. Mg l'app $\mathbb{R} \rightarrow E$
 $t \mapsto e^{ta}$ est
dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ avec $(e^{ta})' = a e^{ta} = e^{ta} \cdot a$

indici
Mg $\left\| \frac{e^{t_0+a} - e^{t_0}}{t - t_0} \right\| \leq e^{\|t_0+a\|} \frac{1 - e^{\|h\|}}{|h|}$ où $h = t - t_0$

② Fin