

DM : ERN
- Serie Vect

Thème : Serie Expo

Partie I : Generalité

E une $\mathbb{R}$ -algebre normée de dim finie

1) Mq $\forall x \in E$ la serie $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge Abs

on definit l'app $\exp: E \rightarrow E$

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Notation

2) i) Mq $\|e^x\| \leq e^{\|x\|} \quad \forall x \in E$

ii) Mq $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in E$ tq $x \cdot y = y \cdot x$

iii) En deduire que e^x inversible $\forall x \in E$
et que $(e^x)^{-1} = e^{-x}$

3) i) Mq tout sev de E est ~~de dimension finie~~ fermé

ii) En deduire $e^x \in \mathcal{R}(x) = \{P(x) \mid P \in \mathcal{R}(x)\}$

4) i) Mq $\|e^x - e^y\| \leq e^{\|x\|} (1 - e^{\|x-y\|}) \quad \forall x, y \in E$

ii) En deduire que l'app $x \mapsto e^x$ est continue

5) Soit $a \in E$ fixe

i) Mq $\forall t \in \mathbb{R}$
 $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

$$\left\| \frac{e^{ta} - e^{t_0 a}}{t - t_0} - a e^{t_0 a} \right\| \leq e^{t_0 a} \left\| \frac{e^{t_0 a} - 1}{|t - t_0|} \right\|$$

ii) en deduire que $t \mapsto e^{ta}$ est derivable
et que $(e^{ta})' = a e^{ta} = e^{ta} \cdot a$

Partie II : Exp Matricielle : Injection, Surjection

on a $\exp: M_n(K) \rightarrow GL_n(K)$ $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
 $A \mapsto e^A$

1) Mg $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$

2) On deduit que $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est Non. surj.

3) Mg $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est Non inj

4) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

i) Mg $e^A = I_n$ et A nilpotente $\Rightarrow A = 0$

ii) Mg $e^A = I_n$ et A diagonalisable $\Rightarrow A = 0$

5) oral Ming 2021 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{R})$

En deduire que A diagble $\Leftrightarrow e^A$ diagble

Indic : utiliser la decomposition de Dunford

6) ii) Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$ diagble, Mg $\exists A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $B = e^A$

ii) Mg l'app $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ $z \mapsto e^z$ est surjective

7) on pose $P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{X^k}{k!}$

Mg $Q \circ P(X) = 1 + X + X^p T(X)$ ou $T \in \mathbb{C}[X]$

indic : penser à des Dev limite

8) Soit N nilpotente d'indice p

i) Mg $P(N)^p = 0$ $P(N) = I_n + N$

ii) En deduire que $e^N = I_n + N$

9) En deduire que $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surj

10) $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ inj ? est ouverte

11) Mg $A \in M_n(\mathbb{R})$ et A triangble dans $M_n(\mathbb{R})$ et $e^A = I \Rightarrow A = 0$

(2)

(Fin)