CPGE Ibn Ghazi
MP* 1 (Rabat)

Prof. MAMOUNI
myismail.net

DM
VAR à densité

Thème : Démo de la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie I

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ VAR indépdts tq $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

① Mq X, Y indépdt tq $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$

Alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

② En déduire que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$

③ On pose $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$

(i) En utilisant thm de limite centrale

mq $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

càd $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} S \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

(ii) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} > x\right) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$

④ Mq $E(S_n^{*2}) = 1$

⑤ Mq $p(S_n^* > x) \leq p(S_n^{*2} \geq x^2) \leq \frac{1}{x^2}$

indic : utiliser Markov

⑥ En deduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} p(S_n^* > x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt \right) dx$$

indic : cvgce dominé

⑦ En deduire que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} p(S_n^* > x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

indic : on pourra utiliser Fubini (Hon prog)

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} ?\,dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t ?\,dx \right) dt$$

$-\infty < x \leq t < +\infty$

⑧ Verifier que $p(S_n = k) = e^{-n} \frac{n^k}{k!}$

⑨ on pose $f_k(t) = p(S_n = k)\, \mathbb{1}_{]0, \frac{k-n}{\sqrt{n}}[}$ si $k \geq n$

0 sinon

ⓘ Verifier que $\int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt = \frac{k-n}{\sqrt{n}} \, \frac{e^{-n} n^k}{k!}$

ⓘⓘ En deduire que $\sum_{k \geq 0} \int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt$ cvge

(iii) mq $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) = p(S_n > \sqrt{n}\, t + n)$ $\forall t \geq 0$

$= p(S_n^* > t)$

(iv) En deduire que

$$\int_0^{+\infty} p(S_n^* > x) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-n) \frac{n^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n!}$$

(B) (i) En deduire que $\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(ii) Conclure que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

autre II / Une autre demo

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ VAR indpdt que $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$

(1) mq $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} S \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

(2) mq $S_n \hookrightarrow \gamma(n+1)$

(3) En deduire que $f_{S_n^*}(x) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n!}\, e^{-\sqrt{n}x} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$ si $x \geq \sqrt{n}$

0 sinon

④ Justifier que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_{S_n^*}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$$

indic : thm de limite central

⑤ Mq $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 e^{-\sqrt{n}.x} \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n dx = \int_0^1 e^{-x^2/2} dx$

⑥ ~~En~~ En deduire que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

⑦ Conclure que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$