DM : *Séries Entieres*

Un peu de dénombrement

Exercice 1 - Nombre de dérangements

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que

$$k = \operatorname{card}\{i \in \{1, \ldots, n\};\ s(i) = i\}.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 - Nombre d'involutions

On rappelle qu'une involution de $\{1, \ldots, n\}$ est une application $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, si $n \geq 1$, alors
$$I_{n+1} = I_n + n I_{n-1}.$$
2. Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout x dans $]-1, 1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1 + x) S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

Corrigé

Exercice 1 - Nombre de dérangements

1. Puisque $\{1,2,3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1,2,3\}$ dans lui-même :

- l'identité;
- les 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$.
- les 2 cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$.

L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que

$$D_{3,0}=2,\ D_{3,1}=3,\ D_{3,2}=0 \text{ et } D_{3,3}=1.$$

2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ ayant k point fixes, alors les ensembles $A_0,\dots,A_n$ sont deux à deux disjoints et leur réunion est égale à l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Ainsi, on a bien $n!=\sum_{k=0}^n \mathrm{card}(A_k)=\sum_{k=0}^n D_{n,k}$.

3. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a

- $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n);
- ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\binom{n}{k}D_{n-k,0}$.

4. Clairement, on a $0\leq d_n\leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!}\leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z|<1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.

5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x|<1$. De plus, on a

$$(\exp x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n=\sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{(n-k)!}\times\frac{1}{k!}.$$

Mais

$$\sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}d_{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n D_{n,k}=1.$$

On obtient

$$(\exp x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}.$$

6. De l'égalité $(\exp x)f(x)=\frac{1}{1-x}$, on tire $\quad f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n=\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Par identification, on obtient bien $d_n=n!\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

7. La probabilité recherchée est $p_n=d_n/n!=\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1)=1/e$.

Exercice 2 - Nombre d'involutions

1. Considérons s une involution de $\{1,\ldots,n+1\}$. Ou bien elle fixe $n+1$. Dans ce cas, sa restriction à $\{1,\ldots,n\}$ est une involution de cet ensemble, et il y a I_n telles involutions. On bien elle envoie $n+1$ sur un entier k de $\{1,\ldots,n\}$. Dans ce cas, $s(k)=n+1$ et s agit comme une involution sur l'ensemble des $n-1$ entiers restants. Il y a n choix pour l'entier k et I_{n-1} choix pour l'involution résultante. On en déduit que

$$I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}.$$

2. Une involution est nécessairement bijective. Donc $I_n\leq n!$ ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série associée à S est supérieur ou égal à 1.

3. On a

$$(1+x)S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{I_n}{n!}x^n+\sum_{n\geq 1}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n=1+\sum_{n\geq 1}\frac{I_n+nI_{n-1}}{n!}x^n.$$

En utilisant le résultat de la première question, on obtient

$$(1+x)S(x)=1+\sum_{n\geq 1}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n=S'(x).$$

4. La résolution de l'équation différentielle donne, compte tenu de la condition initiale $S(0)=1$,

$$S(x)=e^{x+\frac{x^2}{2}}=e^xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

On développe alors chaque exponentielle en série entière, et on réalise le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Après quelques calculs laborieux, on trouve

$$I_{2p}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!}\text{ et }I_{2p+1}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}.$$