DM: *Séries Entieres*

- Comportement au bord d'une série entière

Exercice 1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$.

On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.

2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que

$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.

5. En déduire que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercice 2 - Théorème d'Abel

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. En déduire que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Exercice 3 - Théorèmes de Tauber -1

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente?

2. On suppose désormais que $a_n \geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell=\sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 4 Théorème de Tauber - 2

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que $a_n=o(1/n)$.

Pour $N\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$, on note

$$A(x)=S(x)-\ell,\ B_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(1-x^n)a_n,\ C_N(x)=\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^N a_n-\ell=A(x)+B_N(x)-C_N(x)$.

2. Soit $\varepsilon>0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N\geq N_0$,

$$|C_N(x)|\leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Corrigé

Exercice 1

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|a_n| \leq (l+1)|b_n|.$$

Soit maintenant $r > 0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|a_n|r^n \leq (l+1)|b_n|r^n$$

et donc, si la suite $(|b_n|r^n)$ est bornée, la suite $(|a_n|r^n)$ l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence. Le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ étant en effet donné par

$$R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n|r^n) \text{ est bornée }\}.$$

2. Fixons $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=0}^N b_n \geq 2M$. Posons ensuite $P(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n$. On a $P(1) = 2M > M$. Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de P en 1.

3. Soit $M > 0$ et soient N, δ donnés par la question précédente. Alors, puisque b_n est positif pour tout n, on a, pour chaque $x \in]0,1[$,

$$g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n.$$

En particulier, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$g(x) \geq M.$$

Ceci prouve bien que g tend vers $+\infty$ en 1.

4. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^N (a_n - lb_n)x^n + \sum_{n=0}^N lb_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé $P(x) = \sum_{n=0}^N (a_n - lb_n)x^n$ et $c_n = lb_n$ si $n \leq N$, $c_n = a_n$ sinon.

5. On fixe $\varepsilon > 0$ et on décompose f comme précédemment. D'une part, on a $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ et donc, multipliant par x^n et sommant pour $n = 0, \dots, +\infty$, on déduit que

$$(l-\varepsilon)g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (l+\varepsilon)g(x).$$

D'autre part, puisque P est un polynôme, donc est continu en 1, et que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$, on sait que

$$\frac{P(x)}{g(x)} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$$

On en déduit l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$l - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que f/g tend vers l en 1.

Exercice 2 - Théorème d'Abel

1. On commence par couper la somme en n et par remarquer que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n.$$

La clé ici est d'écrire dans la deuxième somme $a_k = R_{k-1} - R_k$ (et d'effectuer ce qu'on appelle une transformation d'Abel). Pour $m \geq n+1$, il vient

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} (R_{k-1} - R_k)x^k = \sum_{k=n+1}^{m-1} R_k(x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1} - R_m x^m.$$

Puisque (R_p) tend vers 0, on peut faire tendre m vers ∞ et on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n x^{n+1},$$

ce qui donne bien

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. On va d'abord fixer n pour que la deuxième somme soit petite, indépendamment de x dans $[0, 1[$, puis on va faire tendre x vers 1. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq n$, on a $|R_k| \leq \varepsilon$. On en déduit, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\left|(x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k\right| \leq \varepsilon |x-1| \times \sum_{k=N+1}^{+\infty} x^k \leq \varepsilon.$$

On a de plus, toujours pour cette valeur de n,

$$\left|R_n(x^{n+1} - 1)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Cette valeur de n étant fixée, la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1)$ est continue en 1, de limite nulle. Ainsi, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1)\right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, en mettant tous les résultats ensembles, on trouve qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leq 4\varepsilon.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

Exercice 3 - Théorèmes de Tauber -1

1. Pour $a_n = (-1)^n$, on a $S(x) = \frac{1}{1+x}$ qui tend vers $1/2$ si x tend vers 1^-, alors que la série $\sum_n a_n$ diverge.

2. Remarquons d'abord que S est croissante (puisque chaque $x \mapsto a_n x^n$ est croissante). Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $S(x) \leq \ell$. Mais alors, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on a encore

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq S(x) \leq \ell.$$

Si on fait tendre x vers 1^-, on obtient que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell.$

Les sommes partielles de la série $\sum_n a_n$, qui est à termes positifs, sont majorées, et donc la série est convergente. De plus, on a par le passage à la limite précédent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \ell$. Fixons ensuite $\varepsilon > 0$ et $x \in [0, 1[$ tel que $S(x) \geq \ell - \varepsilon$. Il vient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq \ell - \varepsilon.$$

Ceci prouve le résultat demandé.

3. Application : on suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 4 Théorème de Tauber - 2

1. Il s'agit d'une simple vérification algébrique.

2. Soit N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $|a_n| \leq \varepsilon/n$. Pour $N \geq N_0$, il vient

$$|C_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n \geq N+1} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Le résultat de la question précédente nous incite à choisir $x = 1 - \frac{1}{N}$, de sorte à avoir une grande valeur de x qui garantisse néanmoins que $|C_N(x)| \leq \varepsilon$. Majorons ensuite les autres termes. Pour

$A(x)$, c'est facile. Il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_1$,

$$|A(x)| = \left|S\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto t^n$, on a

$$|1 - x^n| \leq n(1 - x) \leq \frac{n}{N}.$$

Il vient

$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n|.$$

D'après le théorème de Cesaro, puisque (na_n) tend vers 0, on sait que $|B_N(x)|$ tend vers 0, et donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_2$,

$$|B_N(x)| \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $N \geq \max(N_0, N_1, N_2)$, on trouve

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_n a_n$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.