

Préparation CB
Algèbre linéaire

Niveau I :

Thème : Calcul Matriciel et Applications

Extrait CNC $\begin{bmatrix} 2005 \\ 2006 \end{bmatrix}$ très détaillé
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$, $G_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ la j^{e} ligne de A

$L_i = (a_{i1} \dots a_{in})$ la i^{e} ligne de A

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{e}}$ le i^{e} elt de la base canonique de $M_{n,1}(K)$

Partie I : Qlq Règles de Calcul Matriciel

1) Vérifier que $Ae_j = G_j$

2) En déduire que si $B \in M_n(K)$

Alors $\boxed{j^{\text{e}} \text{ colonne de } AB = A \cdot j^{\text{e}} \text{ colonne de } B}$

3) On pose $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ matrice élémentaire

①

i) Que vaut la j^{e} colonne de E_{ij}

ii) Que valent les autres colonnes de E_{ij}

4) i) En deduire que la j^{e} colonne de $A E_{ij} = j^{\text{e}}$ colonne de A

ii) " " " les autres colonnes de $A E_{ij}$ sont toutes nulles

iii) En deduire que $A E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} a_{ji} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$
↑
écrite à la j^{e} colonne

5) En utilisant I-4.iii) Mq.

$$E_{ij} A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

↑
écrite à la i^{e} ligne

indication: penser à utiliser la transposée
notamment ${}^t E_{ij} = E_{ji}$

Partie II: Lemme de Schur (version matricielle)

Soit $A \in M_n(K)$, on suppose que $AM = MA \quad \forall M \in M_n(K)$
on se propose de mq $\exists \lambda \in K$ tq $A = \lambda I_n$

1) i) En utilisant $A E_{ij} = E_{ij} A \quad \forall i \neq j$
Mq $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$

$$a_{ii} = a_{jj} \quad \forall i \neq j$$

ii) Conclure

Partie III: Une formule célèbre

on se propose de mg $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

ou $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$ (Symbole de Kronecker)

- 1) On suppose $j \neq k$
- i) Mg la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{ij} E_{kl}$ est nulle
- ii) Mg toutes les colonnes de $E_{ij} E_{kl}$ sont nulles

Indic: Utiliser I.2 et I.4

iii) Conclure

- 2) On suppose $j = k$

i) Mg la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{ij} E_{jl}$ est e_j

ii) Mg les autres colonnes de $E_{ij} E_{jl}$ sont toutes nulles

iii) En déduire que $E_{ij} E_{jl} = E_{il}$

3) Conclure

Partie IV: Un peu de dualité (en dim finie)

on appelle forme linéaire de E toute app
linéaire $\varphi: E \rightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

1) Mg $\text{Tr}: M_n(K) \rightarrow K$ est une forme linéaire

ii) Mg $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad \forall A, B \in M_n(K)$

2) i) Mg $\boxed{\text{Tr}(A E_{ij}) = a_{ji}}$ $\forall i, j$
Indic: utiliser I.4

ii) En déduire que si $\text{Tr}(AB) = 0 \quad \forall B \in M_n(K)$
Alors $A = 0$

(3)

3) Soit $\varphi: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ une forme
linéaire vérifiant $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

On pose $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $m_{ij} = \varphi(E_{ji})$
 $1 \leq i, j \leq n$

ii) Montrer $\varphi(A) = \text{Tr}(AM)$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$

indice : $A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} E_{ij}$

puis utiliser IV.2.2

ii) En déduire que $\text{Tr}(ABM) = \text{Tr}(BAM)$
 $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

iii) " " $\text{Tr}(ABM) = \text{Tr}(AMB)$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

iv) " " $\text{Tr}(A(BM - MB)) = 0$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

v) " " $BM - MB = 0$ $\forall B \in \mathcal{M}_n(K)$

vi) " " $\exists \lambda \in K$ tq $M = \lambda I_n$

indice : utiliser II : Lemme de Schur

vii) " " $\exists \lambda \in K$ tq $\varphi = \lambda \text{Tr}$

4) Que peut-on dire à propos de l'ensemble
 $\{ \varphi: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K \text{ linéaire vérifiant } \varphi(AB) = \varphi(BA) \}$

Fina

(4)