Préparation CB : Réduction

Niveau 3

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie non nulle n.

Un endomorphisme f de E est une homothétie vectorielle s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

Un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe p dans $\mathbb{N}$ (ou dans $\mathbb{N}^*$ ...) tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent f de E est le plus petit élément r de $\mathbb{N}$ tel que $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace. La trace d'un endomorphisme f de E est la trace d'une de ses matrices dans une base de E et nous la noterons $\mathrm{tr}\, f$.

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$. De plus $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E),\ \mathrm{tr}(f\circ g) = \mathrm{tr}(g\circ f)$.

Si f et g sont deux endomorphismes de E on note $[f,g]$ l'endomorphisme $f\circ g - g\circ f$.

Si f un élément de E, on note Φ_f l'application qui a tout élément g de $\mathcal{L}(E)$ associe $[f,g]$.

On se propose d'étudier quelques propriétés de Φ_f pour f dans E.

PARTIE I Préliminaires

A Préliminaire 1

h est un endomorphisme de E. On se propose de montrer qu'il existe un endomorphisme g de E tel que $h = h\circ g\circ h$.

Q1 Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, h$ dans E. Montrer que l'application ℓ de F dans $\mathrm{Im}\, h$ définie par : $\forall x \in F,\ \ell(x) = h(x)$ est un isomorphisme.

Q2 Soit F' un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, h$ dans E et p la projection sur $\mathrm{Im}\, h$ parallèlement à F'.

On pose $\forall x \in E,\ g(x) = l^{-1}(p(x))$ (ce n'est pas une composition ! !). Montrer que g est solution du problème.

B Préliminaire 2 Caractérisation des homothéties.

Q1 Soit h un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) h laisse stable toutes les droites vectorielles de E.

ii) Pour tout élément x de E, la famille $(x, h(x))$ est liée.

Q2 a) Montrer que les homothéties vectorielles de E vérifient i) (et ii)).

b) Soit h un endomorphisme de E qui vérife i) ou ii).

Montrer que pour tout élément x de E il existe un élément λ_x de $\mathbb{K}$ tel que $h(x) = \lambda_x\, x$.

Soit u un élément non nul de E et λ un élément de $\mathbb{K}$ tel que $h(u) = \lambda\, u$.

Montrer que $\forall x \in E,\ h(x) = \lambda\, x$ (on pourra distinguer deux cas : (u,x) liée et (u,x) libre, et faire intervenir, si nécessaire, $x+u$).

c) Conclure.

PARTIE II Quelques propriétés de Φ_f

f est un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Q0 Pour faire plaisir à Jacobi, montrer que si g est h sont deux autres endomorphismes de E :

$$\big[f,[g,h]\big]+\big[g,[h,f]\big]+\big[h,[f,g]\big]=0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Q1 Montrer que Φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2 a) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi_f$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{T}$ des endomorphismes de E de trace nulle.

b) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N},\ f^k\in\operatorname{Ker}\Phi_f$.

c) Déterminer Φ_f et $\operatorname{Ker}\Phi_f$ lorsque f est une homothétie vectorielle.

d) Montrer que si f n'est pas une homothétie vectorielle : $\dim\operatorname{Ker}\Phi_f\geqslant 2$.

Q3 a) Montrer que $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall g\in\mathcal{L}(E),\ \Phi_f^p(g)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p-k}\circ g\circ f^k$.

On suppose dans la suite de cette question que f est nilpotent d'indice r.

b) Préciser Φ_f^{2r-1} et Φ_f^{2r-2}.

c) Utiliser I A pour montrer que f^{r-1} appartient à l'image de Φ_f^{2r-2}.

d) Que dire alors de Φ_f ?

Q4 On suppose que $\Phi_f=0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

a) Montrer que pour tout élément x de E, $(x,f(x))$ est liée (on pourra construire une projection à partir de x).

b) En déduire que f est une homothétie vectorielle.

c) Réciproquement ? !. Énoncer le résultat obtenu.

Q5 On suppose que g est un vecteur propre de ϕ_f associé à la valeur propre non nulle λ.

a) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N},\ \Phi_f(g^k)=k\,\lambda\,g^k$.

b) En déduire en raisonnant par l'absurde que g est nilpotent.

Q6 λ et μ sont deux valeurs propres de f. A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E.

Montrer que l'on peut trouver un élément non nul X (resp. Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX=\lambda X$ (resp. ${}^tAY=\mu Y$).

Calculer AX^tY-X^tYA et en déduire que $\lambda-\mu$ est valeur propre de Φ_f.

Q7 On suppose que f admet n valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, e_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i.

a) Justifier que $\widehat{\mathcal{B}}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E et déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec $M_{\widehat{\mathcal{B}}}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}\Phi_f$ et le rang de Φ_f. Montrer que $(\mathrm{Id}_E,f,f^2,\dots,f^{n-1})$ est une base de $\operatorname{Ker}\Phi_f$.

c) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2-n.

Montrer que $\operatorname{Im}\Phi_f=\{h\in\mathcal{L}(E)\mid M_{\widehat{\mathcal{B}}}(h)\in S\}$.

PARTIE III Deux caractérisations des endomorphismes de trace nulle.

Dans un premier temps on se propose de montrer, par récurrence sur la dimension, qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie a une trace nulle si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}$, de cet espace, telle que sa matrice dans $\mathcal{C}$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls donc soit un élément de $\mathcal{S}$.

Q1 a) Montrer que la condition est suffisante.

b) Montrer que la condition est nécessaire pour les espaces vectoriels de dimension 1.

Q2 On suppose que la condition est nécessaire pour tous les espaces vectoriels de dimension $n-1$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$) et on se propose de montrer qu'elle nécessaire dans E qui est de dimension n.

h est un endomorphisme de E de trace nulle.

a) Examiner le cas où $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans la suite on suppose que h n'est pas nul.

b) Montrer par l'absurde qu'il existe un élément e_1 de E tel que $(e_1, h(e_1))$ soit libre.

c) Montrer l'existence d'un supplémentaire F de la droite vectorielle D engendrée par e_1 qui contient $h(e_1)$.

On note p la projection sur F parallèlement à D et on pose : $\forall y \in F,\ h'(y) = p\big(h(y)\big)$.

d) Montrer que h' est un endomorphisme de F de trace nulle. Conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

e) Donner (sans démonstration) un résultat analogue pour les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q3 On se propose de montrer qu'un endomorphisme h de E est de trace nulle si et seulement si on peut trouver deux endomorphismes f et g tels que $h = [f, g]$.

a) Montrer que la condition est suffisante.

b) Utiliser II Q7 et ce qui précède pour montrer que la condition est nécessaire.

c) Donner (sans démonstration) un résultat analogue pour les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q3' **Facultatif** On se propose de retrouver le résultat de Q3. La condition est clairement suffisante. La condition nécessaire est évidente dans les espaces vectoriels de dimension 1.

On suppose que la condition est nécessaire pour tous les espaces vectoriels de dimension $n-1$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$) et on se propose de montrer qu'elle nécessaire dans E qui est de dimension n.

h est un endomorphisme de E de trace nulle.

a) Examiner le cas où $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans la suite on suppose que h n'est pas nul.

b) Montrer par l'absurde qu'il existe un élément e_1 de E tel que $(e_1, h(e_1))$ soit libre.

c) Montrer que l'on peut compléter (e_1) en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice A de h dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in \big(\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2\big)$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

d) Montrer l'existence de deux éléments U_1 et V_1 de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ tels que : $A_1 = U_1V_1 - V_1U_1$.

Justifier l'existence d'un élément α de $\mathbb{K}$ tel que $U_1 - \alpha\, I_{n-1}$ soit inversible.

e) On pose $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in \big(\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2\big)$.

Montrer que $A = UV - VU$ si et seulement si ${}^tX = -{}^tR(U_1 - \alpha\, I_{n-1})$ et $Y = (U - \alpha\, I_{n-1})S$. Conclure.

PARTIE IV Réduction de Φ_f lorsque f est diagonalisable.

► Ici f est un endomorphisme diagonalisable de E. On se propose de montrer que Φ_f est diagonalisable.

λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}$ est l'endomorphisme de E de matrice $E_{i,j}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1 Calculer $\Phi_f(u_{i,j})$ pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$. En déduire que Φ_f est diagonalisable et préciser son spectre.

Q2 a) Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ g(\text{SEP }(f,\lambda_i)) \subset \text{SEP }(f,\lambda_i)\}$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker}\Phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\text{SEP }(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(\text{SEP }(f,\lambda_2)) \times \cdots \times \mathcal{L}(\text{SEP }(f,\lambda_p))$.

c) Préciser la dimension de $\operatorname{Ker}\Phi_f$ et le $\operatorname{rg}\Phi_f$. Et si $p = n$?

PARTIE V f est diagonalisable lorsque Φ_f est diagonalisable.

► Ici f est un endomorphisme E tel que Φ_f est diagonalisable. On se propose de montrer que f est diagonalisable.

Q1 On suppose que f admet au moins une valeur propre λ. $(g_1, g_2, \ldots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de Φ_f respectivement associés aux valeurs propres β_1, β_2, ..., β_{n^2} et x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

a) Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, calculer $f\big(g_i(x)\big)$ en fonction de λ, β_i et $g_i(x)$.

b) On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(g) = g(x)$. Montrer que φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{L}(E)$ dans E.

c) Montrer que f est diagonalisable.

On se propose de montrer que le spectre de f n'est pas vide.

Q2 Ici $K = \mathbb{C}$. a) Montrer que f possède un polynôme annulateur non nul P.

b) En remarquant que P est scindé montrer qu'au moins une des racines de P est une valeur propre de f. Conclure.

Q3 Ici $K = \mathbb{R}$ et on raisonne par l'absurde. Supposons que f n'a pas de valeur propre. Soit A la matrice de f dans une base de E.

On considère l'endomorphisme ψ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \psi_A(M) = AM - MA$.

On considère également l'endomorphisme $\widehat{\psi_A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \widehat{\psi_A}(M) = AM - MA$.

a) Montrer que ψ_A est diagonalisable.

Montrer que $\widehat{\psi_A}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.

b) Montrer qu'il existe un complexe non réel γ valeur propre de A. Montrer que $\bar{\gamma}$ est valeur propre de A et de ${}^tA$.

Soit X (resp. Y) un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \gamma\, X$ (${}^tAY = \bar{\gamma}\, Y$).

Calculer $\widehat{\psi_A}(X{}^tY)$ et en déduire une contradiction.

Q4 Conclure.

PARTIE I

A **Q1** • h est linéaire donc ℓ est linéaire. Mieux $\ell \in \mathcal{L}(F, \mathrm{Im}\, h)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}\, \ell$. $x \in F$ et $\ell(x) = 0_E$. $x \in F$ et $h(x) = 0_E$.

Alors $x \in F \cap \mathrm{Ker}\, h = \{0_E\}$. $x = 0_E$.

donc $\mathrm{Ker}\, \ell = \{0_E\}$. ℓ est injective.

• Montrons que ℓ est surjective.

Soit $y \in \mathrm{Im}\, h$. $\exists t \in E$, $y = h(t)$. Or $E = F \oplus \mathrm{Ker}\, h$.

donc $\exists (t_1, t_2) \in F \times \mathrm{Ker}\, h$, $t = t_1 + t_2$.

Alors $y = h(t) = h(t_1) + h(t_2) \underset{\uparrow}{=} \ell(t_1)$.
$t_1 \in F$ et $t_2 \in \mathrm{Ker}\, h$.

$\forall y \in \mathrm{Im}\, h, \exists t_1 \in F$, $y = \ell(t_1)$. ℓ est surjective.

ℓ est un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}\, h$. Notons que ℓ^{-1} est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, h$ sur F.

Q2 • Soit $x \in E$.

$p(x) \in \mathrm{Im}\, h$ donc $\ell^{-1}(p(x))$ appartient à F donc à E.

Alors g est une application de E dans E.

• Soit $(x, y) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$g(\lambda x + y) = \ell^{-1}(p(\lambda x + y)) = \ell^{-1}(\lambda p(x) + p(y)) = \lambda \ell^{-1}(p(x)) + \ell^{-1}(p(y)) = \lambda g(x) + g(y)$.

donc g est linéaire.

• Soit $x \in E$. $(h \circ g \circ h)(x) = h(g(h(x))) = h(\ell^{-1}(p(h(x))))$.

$\exists ! (x_1, x_2) \in F \times \mathrm{Ker}\, h$, $x = x_1 + x_2$.

Notons que $h(x) = h(x_1) = \ell(x_1)$ car $x_1 \in F$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, h$.

$p(h(x)) = p(\ell(x_1)) \underset{\uparrow}{=} \ell(x_1)$. Alors $\ell^{-1}(p(h(x))) = \ell^{-1}(\ell(x_1)) = x_1$

$\ell(x_1) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$

donc $h(\ell^{-1}(p(\ell(x)))) = h(x_1) = h(x)$.

Alors $h(g(\ell(x))) = h(x)$. $(h \circ g \circ \ell)(x) = h(x)$ et ceci pour tout x dans E.

Alors $h \circ g \circ \ell = h$.

<u>g est un endomorphisme de E tel que $h = h \circ g \circ \ell$.</u>

$\boxed{B}$ Q1 • <u>Supposons i) et montrons ii).</u> Soit $x \in E$.

Si $x = 0_E$: $(x, h(x))$ est liée. Supposons $x \neq 0_E$.

Alors $\text{Vect}(x)$ est une droite vectorielle. Elle est stable par h par hypothèse.

Alors $h(x) \in \text{Vect}(x)$. $\exists \alpha \in \mathbb{K}, h(x) = \alpha x$. Ainsi $(x, h(x))$ est liée.

• <u>Supposons ii) et montrons i).</u> Soit D une droite vectorielle.

$\exists a \in E - \{0_E\}$, $D = \text{Vect}(a)$.

$(a, h(a))$ est liée donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha a + \beta h(a) = 0_E$ et $(\alpha, \beta) \neq 0_{\mathbb{K}^2}$.

Supposons $\beta = 0$. Alors $\alpha a = 0_E$ et $a \neq 0_E$ donc $\alpha = 0$. Ainsi $(\alpha, \beta) = 0_{\mathbb{K}^2}$!

Par conséquent $\beta \neq 0$. Alors $h(a) = -\frac{\alpha}{\beta} a$. Posons $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$. $h(a) = \lambda a$.

$h(D) = h(\text{Vect}(a)) = \text{Vect}(h(a)) = \text{Vect}(\lambda a) \subset \text{Vect}(a) = D$. $h(D) \subset D$.

h laisse donc stable toutes les droites vectorielles.

Finalement <u>les deux assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) h laisse stables toutes les droites vectorielles de E

ii) Pour tout élément x de E, la famille $(x, h(x))$ est liée.

Q2 <u>a)</u> Soit h une homothétie vectorielle. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h = \lambda \, Id_E$.

Pour tout x dans E, $(x, h(x)) = (x, \lambda x)$.

donc pour tout x dans E, $(x, h(x))$ est liée.

<u>Les homothéties vectorielles de E vérifient ii) et donc i).</u>

b) Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$: $h(x) = 0_E = 0.0_E = 0.x$.

Supposons $x \neq 0_E$. $D = \mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle de E.

Elle est donc stable par h. Alors $h(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $h(x) = \lambda_x x$.

$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, h(x) = \lambda_x x$.

Soit u est un élément non nul de E. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h(u) = \lambda u$.

Montrons alors que $\forall x \in E$, $h(x) = \lambda x$.

Soit $x \in E$.

1er cas.. (u,x) est liée. Comme u n'est pas nul : $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $x = \alpha u$.

Alors $h(x) = h(\alpha u) = \alpha h(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda x$. $h(x) = \lambda x$.

2ème cas.. (u,x) est libre.

$\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $h(x) = \lambda_x x$ et $\exists \lambda_{x+u} \in \mathbb{K}$, $h(x+u) = \lambda_{x+u}(x+u)$.

Alors $\lambda_{x+u}(x+u) = h(x+u) = h(x) + h(u) = \lambda_x x + \lambda u$.

Donc $(\lambda_{x+u} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+u} - \lambda) u = 0_E$. La liberté de (x,u) donne :

$\lambda_{x+u} - \lambda_x = \lambda_{x+u} - \lambda = 0$. Donc $\lambda_{x+u} = \lambda_x = \lambda$.

Ainsi $h(x) = \lambda_x x = \lambda x$.

Finalement $\forall x \in E$, $h(x) = \lambda x$. $h = \lambda \, \mathrm{Id}_E$. h est une homothétie vectorielle.

c) Il résulte de a) et b) que si h est un endomorphisme de E les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) h laisse stables les droites vectorielles de E

ii) Pour tout élément x de E, la famille $(x, h(x))$ est liée.

iii) h est une homothétie vectorielle.

PARTIE II Quelques propriétés de ϕ_f

Q0 $[f,[g,h]] = f\circ[g,h] - [g,h]\circ f = f\circ(g\circ h - h\circ g) - (g\circ h - h\circ g)\circ f$

$[f,[g,h]] = f\circ g\circ h - f\circ h\circ g - g\circ h\circ f + h\circ g\circ f$ (1)

La permutation "$f\to g\to h\to f$" donne à partir de (1) :

$[g,[h,f]] = g\circ h\circ f - g\circ f\circ h - h\circ f\circ g + f\circ h\circ g$ (2).

La permutation "$f\to g\to h\to f$" donne à partir de (2) :

$[h,[f,g]] = h\circ f\circ g - h\circ g\circ f - f\circ g\circ h + g\circ f\circ h$ (3).

En ajoutant (1), (2) et (3) on obtient :

$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

⚠ Q1 → voir p 5. →

Q2 a) Soit $g \in \mathrm{Im}\,\phi_f$. $\exists h \in \mathcal{L}(E)$, $g = \phi_f(h)$.

$g = [f,h] = f\circ h - h\circ f$.

$\mathrm{Tr}(f\circ h) = \mathrm{Tr}(h\circ f)$.

Alors $\mathrm{Tr}(g) = \mathrm{Tr}(f\circ h) - \mathrm{Tr}(h\circ f) = 0$

$\mathrm{Im}\,\phi_f$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes de E de trace nulle.

c) Soit f une homothétie vectorielle de E. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

$\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\phi_f(g) = f\circ g - g\circ f = \lambda \mathrm{Id}_E\circ g - g\circ(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda g - \lambda g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$ et $\mathrm{Ker}\,\phi_f = \mathcal{L}(E)$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\phi_f(f^k) = f\circ f^k - f^k\circ f = f^{k+1} - f^{k+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\phi_f(f^k) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$.

d) Supposons que f n'est pas une homothétie vectorielle de E.

Id_E et f sont deux éléments de $\ker \phi_f$. Montrons que la famille (Id_E, f) est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ tel que $\alpha Id_E + \beta f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons $\beta \neq 0$. Alors $f = -\frac{\alpha}{\beta} Id_E$ donc f est une homothétie vectorielle.

Ainsi $\beta = 0$. Alors $\alpha Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $\dim E = n \geqslant 1$.

Donc $\alpha = 0$. Ceci achève de montrer la liberté de (Id_E, f).

(Id_E, f) est une famille libre de cardinal 2 de $\ker \phi_f$. Alors $\dim \ker \phi_f \geqslant 2$

Si f n'est pas une homothétie vectorielle de E : $\dim \ker \phi_f \geqslant 2$.

(Q1) * Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. $f\circ g \in \mathcal{L}(E)$ et $g\circ f \in \mathcal{L}(E)$ donc $\phi_f(g) = f\circ g - g\circ f \in \mathcal{L}(E)$.

ϕ_f est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(g,h) \in \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$.

$\phi_f(\lambda g + h) = f\circ(\lambda g + h) - (\lambda g + h)\circ f = \lambda f\circ g + f\circ h - \lambda g\circ f - h\circ f = \lambda(f\circ g - g\circ f) + f\circ h - h\circ f$

$\phi_f(\lambda g + h) = \lambda\,\phi_f(g) + \phi_f(h)$.

$\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $\forall (g,h)\in(\mathcal{L}(E))^2$, $\phi_f(\lambda g + h) = \lambda\,\phi_f(g) + \phi_f(h)$. ϕ est linéaire.

Ainsi ϕ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. $\phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

(Q3) Montrons le résultat par récurrence sur p.

$\phi_f^0 = Id_{\mathcal{L}(E)}$

* $\forall g\in\mathcal{L}(E)$, $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{0}{k} f^{0-k}\circ g\circ f^k = (-1)^0\binom{0}{0} f^{0-0}\circ g\circ f^0 = Id_E\circ g\circ Id_E = g = \phi_f^0(g)$.

La propriété est vraie pour $p=0$.

* Supposons la propriété vraie pour p élément de $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $p+1$.

$\phi_f^{p+1}(g) = \phi_f(\phi_f^p(g)) = \phi_f\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} f^{p-k}\circ g\circ f^k\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\,\phi_f(f^{p-k}\circ g\circ f^k)$.

ϕ_f est linéaire

$$\phi_f^{p+1}(g)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\left[f\circ f^{p-k}\circ g\circ f^k-f^{p-k}\circ g\circ f^k\circ f\right].$$

$$\phi_f^{p+1}(g)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p-k+1}\circ g\circ f^k+\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}f^{p-k}\circ g\circ f^{k+1}\quad \underset{k\to k-1}{\downarrow}$$

$$\phi_f^{p+1}(g)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p+1-k}\circ g\circ f^k+\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^k\binom{p}{k-1}f^{p-(k-1)}\circ g\circ f^k.$$

$\downarrow k=0$ $\qquad\qquad$ $\searrow k=p+1$

$$\phi_f^{p+1}(g)=f^{p+1}\circ g\circ f^0+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\left[\binom{p}{k}+\binom{p}{k-1}\right]f^{p+1-k}\circ g\circ f^k+(-1)^{p+1}f^0\circ g\circ f^{p+1}.$$

$$\phi^{p+1}(g)=(-1)^0f^{p+1-0}\circ g\circ f^0+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p+1}{k}f^{p+1-k}\circ g\circ f^k+(-1)^{p+1}f^{(p+1)-(p+1)}\circ g\circ f^{p+1}.$$

$$\phi^{p+1}(g)=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\binom{p+1}{k}f^{p+1-k}\circ g\circ f^k$$ et ceci pour tout g dans $\mathcal{L}(E)$.

La propriété est donc vraie pour $p+1$. La récurrence s'achève.

$$\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N},\ \forall g\in\mathcal{L}(E),\quad \phi_f^{p}(g)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p+1-k}\circ g\circ f^k.}}$$

On suppose dans la suite de cette question que f est nilpotent d'indice r.

Alors $f^r=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{r-1}\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>b)</u> Soit $g\in\mathcal{L}(E)$

$$\phi_f^{2r-1}(g)=\sum_{k=0}^{2r-1}(-1)^k\binom{2r-1}{k}f^{2r-1-k}\circ g\circ f^k\underset{\substack{\uparrow\\ f^k=0_{\mathcal{L}(E)}\text{ si } k\geq r}}{=}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{2r-1}{k}f^{2r-1-k}\circ g\circ f^k\underset{\uparrow}{=}0_{\mathcal{L}(E)}$$

$\left\{\begin{array}{l} f^{2r-1-k}=0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si} \\ k\in[\![0,r-1]\!] \text{ car} \\ k\leq r-1\Rightarrow 2r-1-k\geq r \end{array}\right.$

$\forall g\in\mathcal{L}(E),\ \phi_f^{2r-1}(g)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\underline{\underline{\phi_f^{2r-1}=0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}}}$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$, $\phi^{2r-2}(g) = \sum_{k=0}^{2r-2} (-1)^k \binom{2r-2}{k} f^{2r-2-k} \circ g \circ f^k$

si $k \in [\![r, 2r-2]\!]$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f^{2r-2-k} \circ g \circ f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

si $k = r-1$, $f^{2r-2-k} \circ g \circ f^k = f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1}$.

Supposons que $k \in [\![0, r-2]\!]$. Alors $2r-2-k \geq 2r-2-(r-2) = r$.

donc $f^{2r-2-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Par conséquent $f^{2r-2-k} \circ g \circ f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Finalement $\phi^{2r-2}(g) = (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1}$ et ceci pour tout g dans $\mathcal{L}(E)$.

c) $f^{r-1} \in \mathcal{L}(E)$. Alors I A montré l'existence d'un endomorphisme g de E tel que $f^{r-1} = f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1}$.

$\phi_f^{2r-2}(g) = (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1} = (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} f^{r-1}$.

donc $f^{r-1} = \phi_f^{2r-2} \left(\frac{1}{(-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1}} g \right) \in \operatorname{Im} \phi_f^{2r-2}$.

$f^{r-1} \in \operatorname{Im} \phi_f^{2r-2}$.

d) 1°/ $\phi_f^{2r-1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$ donc ϕ_f est nilpotent.

2°/ $f^{r-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{r-1} \in \operatorname{Im} \phi_f^{2r-2}$. Alors $\operatorname{Im} \phi_f^{2r-2} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

donc $\phi_f^{2r-2} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

Finalement ϕ_f est nilpotent et son indice de nilpotence est $2r-1$.

Q4 On suppose que $\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

Alors $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g - g \circ f = \phi_f(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$.

a) Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$: $(x, f(x))$ est liée. Supposons x non nul.

Soit D la droite vectorielle engendrée par x. Soit D' un supplémentaire de D dans E et soit g la projection sur D parallèlement à D'.

$D = \mathrm{Ker}(g - Id_E) = \mathrm{Im}\, g$.

$f \circ g = g \circ f$ donc $f(g(x)) = g(f(x))$; $f(x) = g(f(x))$; $f(x) \in \mathrm{Ker}(g - Id_E) = D$.

Alors $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$; $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda x$. $(x, f(x))$ est liée.

Finalement <u>pour tout x dans E, $(x, f(x))$ est liée.</u>

b) I B montre alors que f est une homothétie vectorielle.

c) Réciproquement supposons que f est une homothétie vectorielle.

Alors d'après Q2 c) : $\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

Ainsi <u>$\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$ si et seulement si f est une homothétie vectorielle.</u>

(Q5) a) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\phi_f(g^k) = k\lambda g^k$.

- $\phi_f(g^0) = \phi_f(Id_E) = f \circ Id_E - Id_E \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0\, \lambda\, g^0$. La propriété est vraie pour $k = 0$.

- Supposons l'égalité vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$\phi_f(g) = \lambda g$ donc $f \circ g - g \circ f = \lambda g$.

$\phi_f(g^{k+1}) = f \circ g^{k+1} - g^{k+1} \circ f = (f \circ g^k) \circ g - g^{k+1} \circ f$. Or l'hypothèse de récurrence donne : $\phi_f(g^k) = k\lambda g^k$. Ainsi $f \circ g^k - g^k \circ f = k\lambda g^k$

donc $f \circ g^k = g^k \circ f + k\lambda g^k$.

Alors $\phi_f(g^{k+1}) = (g^k \circ f + k\lambda g^k) \circ g - g^{k+1} \circ f = g^k \circ f \circ g + k\lambda g^{k+1} - g^{k+1} \circ f$.

Or $f \circ g = g \circ f + \lambda g$.

$\phi_f(g^{\ell+1}) = g^\ell \circ (g\circ f + \lambda g) + \ell\lambda g^{\ell+1} - g^{\ell+1}\circ f$.

$\phi_f(g^{\ell+1}) = g^{\ell+1}\circ f + \lambda g^{\ell+1} + \ell\lambda g^{\ell+1} - g^{\ell+1}\circ f = (\ell+1)\lambda g^{\ell+1}$. ceci achève la récurrence.

$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \phi_f(g^\ell) = \ell\lambda g^\ell$.

b) Supposons que $\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ g^\ell \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ \phi_f(g^\ell) = \ell\lambda g^\ell$ et $g^\ell \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

donc $\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ \ell\lambda \in Sp\,\phi_f$.

Comme λ n'est pas nul, ϕ_f admet une infinité de valeurs propres

ceci est impossible car $\phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie

(égale à n^2).

Alors $\exists \ell \in \mathbb{N}^*,\ g^\ell = 0_{\mathcal{L}(E)}$. donc g est nilpotent.

Q6 $\lambda \in Sp\,f$ donc $\lambda \in Sp\,A$. Alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX = \lambda X$.

$\mu \in Sp\,f$ donc $\mu \in Sp\,A$.

Alors $A - \mu I_n$ n'est pas inversible. Donc ${}^t(A-\mu I_n)$ n'est pas inversible.

Ainsi ${}^tA - \mu I_n$ n'est pas inversible. Cela permet de dire que μ est une

valeur propre de ${}^tA$. $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et ${}^tAY = \mu Y$.

$AX{}^tY - X{}^tYA = \lambda X{}^tY - X{}^t({}^tAY) = \lambda X{}^tY - X{}^t(\mu Y) = \lambda X{}^tY - \mu X{}^tY$.

$AX{}^tY - X{}^tYA = (\lambda - \mu)X{}^tY$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors 1) $X{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2) $X{}^tY = (x_i y_j)_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$

Soit g l'endomorphisme de E de matrice X^tY dans $\mathcal{B}$.

$AX^tY - X^tYA = (\lambda-\mu)X^tY$. donc $f\circ g - g\circ f = (\lambda-\mu)g$.

ce qui donne $\phi_f(g) = (\lambda-\mu)g$.

$X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{i_0} \neq 0$.

$Y \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0} y_{j_0}$ est un coefficient non nul de la matrice X^tY.

donc $X^tY \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$. Alors $g \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\phi_f(g) = (\lambda-\mu)g$.

ce qui permet de dire que <u>$\lambda-\mu$ est une valeur propre de ϕ_f.</u>

(Q7) a) $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Alors $\hat{\mathcal{B}} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre de E de cardinal n et n est la dimension de E.

<u>$\hat{\mathcal{B}} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.</u>

Posons $D = M_{\hat{\mathcal{B}}}(f)$. $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Posons également $D = (d_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$

$MD = DM \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj}$

$MD = DM \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} d_{jj} = d_{ii} m_{ij}$ $\leftarrow \begin{cases} d_{kj} = 0 \text{ si } k \neq j \\ d_{ik} = 0 \text{ si } k \neq i \end{cases}$

$MD = DM \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$

$MD = DM \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\begin{cases} m_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \quad (\text{car } \lambda_j - \lambda_i \neq 0) \\ 0 = 0 & \text{si } i = j \;\;!! \end{cases}$

$MD = DM \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0.$

$MD = DM \Leftrightarrow M$ est une matrice diagonale.

<u>L'ensemble des matrices qui commutent avec $M_{\mathcal{B}}(f)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.</u>

<u>b)</u> $\mathcal{D} = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid MD = DM\} = \{\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n);\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}.$

$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix};\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$. Notons $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$. $D = \{\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{22} + \dots + \alpha_n E_{nn};\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}$

<u>$\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$</u>. Notons alors que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$...

$(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}$. c'est aussi une famille libre comme sous-famille d'une base.

Alors <u>$(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ est une base de $\mathcal{D}$.</u> <u>$\dim \mathcal{D} = n$.</u>

$\mathrm{Ker}\, \phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

$g \in \mathrm{Ker}\, \phi_f$

$\Updownarrow$ $f \circ g = g \circ f$

$\Updownarrow$

$M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f)$

$\Updownarrow$ $M_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{D}$. <u>$\mathrm{Ker}\, \phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{D}\}$.</u>

Posons $\forall g \in \mathrm{Ker}\, \phi_f$, $L(g) = M_{\mathcal{B}}(g)$. L est clairement une application linéaire injective de $\mathrm{Ker}\, \phi_f$ dans $\mathcal{D}$. Montrons qu'elle est surjective. Soit $M \in \mathcal{D}$.

$\exists !\, g \in \mathcal{L}(E),\ M_{\mathcal{B}}(g) = M$. Alors $M_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{D}$ donc $g \in \mathrm{Ker}\, \phi_f$.

$g \in \mathrm{Ker}\, \phi_f$ et $L(g) = M_{\mathcal{B}}(g) = M$. Ceci achève de montrer la surjectivité de L.

<u>L est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\, \phi_f$ sur $\mathcal{D}$.</u>

Mais $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{D}$. Donc $\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = \dim \mathcal{D} = n$.

Alors $\mathrm{rg}\,\phi_f = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n^2 - n$.

$\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n$ et $\mathrm{rg}\,\phi_f = n^2 - n$.

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $f^\ell \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$ d'après II φ 2 b)

$(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ de cardinal n.

Or $\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n$. Pour montrer que cette famille est une base de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ il ne reste donc plus à montrer qu'elle est libre.

Soit $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell f^\ell = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell f^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^\ell) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell\, (\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^\ell$

$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell\, \mathrm{Diag}(\lambda_1^\ell, \dots, \lambda_n^\ell) = \mathrm{Diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n))$ où P est le polynôme $\sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell X^\ell$.

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$. Alors $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n racines de P deux à deux distinctes. Or $\deg P \leq n-1$ donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Alors $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$. Ceci achève de montrer que $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$.

Mieux $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$.

b) $\rightarrow$ $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\rightarrow$ $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \in \mathcal{S}$ donc $\mathcal{S} \neq \emptyset$

$\rightarrow$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $M = (m_{ij})$ et $N = (n_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{S}$.

$\lambda M + N = (\lambda m_{ij} + n_{ij})$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda m_{ii} + n_{ii} = \lambda \times 0 + 0 = 0$. Donc $\lambda M + N \in \mathcal{S}$.

ceci achève de montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

Posons $L = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \neq j\}$.

$(E_{ij})_{(i,j)\in L}$ est clairement une famille génératrice de $\mathcal{S}$. En effet :

1) $\forall (i,j) \in L$, $E_{ij} \in \mathcal{S}$

2) Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}$.

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} E_{ij} \underset{\underset{m_{ii}=0}{\uparrow}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_{ij} E_{ij} = \sum_{(i,j)\in L} m_{ij} E_{ij}.$$

$(E_{ij})_{(i,j)\in L}$ est également une famille libre comme sous-famille de la base

$(E_{ij})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$.

Donc $(E_{ij})_{(i,j)\in L}$ est une base de $\mathcal{S}$.

Alors $\dim \mathcal{S} = \operatorname{card} L = \operatorname{card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \neq j\} = n^2 - n$.

$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - n$.

Posons $H = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\mathcal{B}}(h) \in \mathcal{S}\}$.

- $H \subset \mathcal{L}(E)$.
- $0_{\mathcal{L}(E)} \in H$ car $0_{M_n(\mathbb{K})} \in \mathcal{S}$. Alors $H \neq \emptyset$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(h_1, h_2) \in H^2$.

$M_{\mathcal{B}}(\lambda h_1 + h_2) = \lambda M_{\mathcal{B}}(h_1) + M_{\mathcal{B}}(h_2) \in \mathcal{S}$ car $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel

de $M_n(\mathbb{K})$ et, $M_{\mathcal{B}}(h_1)$ et $M_{\mathcal{B}}(h_2)$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$. Alors $\lambda h_1 + h_2 \in H$

Alors H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Il est clair que H est isomorphe à $\mathcal{S}$ ($h \mapsto M_{\mathcal{B}}(h)$ définit un isomorphisme de H sur $\mathcal{S}$).

Voir p. 14 !

Alors $\dim H = \dim \mathcal{S} = n^2 - n = \dim \operatorname{Im} \phi_f$.

Montrons que $\operatorname{Im} \phi_f \subset H$.

Soit $h \in \operatorname{Im} \phi_f$. $\exists g \in \mathcal{L}(E)$, $h = \phi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

$M_{\hat{B}}(h) = M_{\hat{B}}(f) M_{\hat{B}}(g) - M_{\hat{B}}(g) M_{\hat{B}}(f)$.

Posons $M_{\hat{B}}(h) = (\alpha_{ij})$, $M_{\hat{B}}(g) = (\beta_{ij})$ et $M_{\hat{B}}(f) = (\gamma_{ij})$

Notons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \beta_{kj} - \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \gamma_{kj} = \gamma_{ii} \beta_{ij} - \beta_{ij} \gamma_{jj} = (\lambda_i - \lambda_j) \beta_{ij}$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_{ii} = 0$. Donc $M_{\hat{B}}(h) \in \mathcal{S}$. Alors $h \in H$.

Finalement $\operatorname{Im} \phi_f \subset H$ et $\dim \operatorname{Im} \phi_f = \dim H = n^2 - n < +\infty$.

Donc $\operatorname{Im} \phi_f = H$. C'est-à-dire que $\underline{\underline{\operatorname{Im} \phi_f = \{ h \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\hat{B}}(h) \in \mathcal{S} \}}}$.

Preuve de H isomorphe à $\mathcal{S}$. Posons $\forall h \in H$, $\hat{L}(h) = M_{\hat{B}}(h)$. $\hat{L}$ est clairement une application linéaire injective de H dans $\mathcal{S}$.

($H = \{ h \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\hat{B}}(h) \in \mathcal{S} \}$.)

Montrons qu'elle est surjective.

Soit $M \in \mathcal{S}$. $\exists! h \in \underline{\underline{\mathcal{L}}}(E)$, $M_{\hat{B}}(h) = M$. h appartient à $\mathcal{S}$ donc par définition de H : $h \in H$. Ainsi $h \in H$ et $\hat{L}(h) = M_{\hat{B}}(h) = M$.

$\forall M \in \mathcal{S}$, $\exists h \in H$, $\hat{L}(h) = M$. $\hat{L}$ est surjective.

Donc $\hat{L}$ est un isomorphisme de H sur $\mathcal{S}$. H et $\mathcal{S}$ sont isomorphes.

PARTIE III Deux caractérisations des endomorphismes de trace nulle

Q1) a) Soit f un endomorphisme de E. Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ ait ses coefficients diagonaux nuls.

Alors $tr(f) = tr(M_{\mathcal{B}}(f)) = 0$! La condition est suffisante.

b) Supposons que $\dim E = 1$. Soit f un endomorphisme de trace nul.

Soit $\mathcal{B} = (e_1)$ une base de E. Posons $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

$f(e_1) \in E = Vect(e_1)$. $\exists a \in \mathbb{K}$, $f(e_1) = a e_1$.

Donc $A = [a]$. Or $0 = tr(f) = tr(A) = a$.

Ainsi $A = 0_{M_1(\mathbb{K})}$. Les coefficients diagonaux de A sont nuls !!

La condition est nécessaire pour les espaces vectoriels de dimension 1.

Q2) Supposons que la condition est nécessaire dans les espaces vectoriels de dimension $n-1$ pour n dans $[\![2, +\infty[\![$.

Ici $\dim E = n$. $h \in \mathcal{L}(E)$ et $tr(h) = 0$.

a) Supposons $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $M_{\mathcal{B}}(h) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ donc les coefficients diagonaux de $M_{\mathcal{B}}(h)$ sont nuls.

b) Dans la suite h n'est pas nul.

Supposons que pour tout x dans E, $(x, h(x))$ est liée.

Alors d'après I 8 h est une homothétie vectorielle.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $h = \lambda Id_E$. Alors $0 = tr(h) = tr(\lambda Id_E) = \lambda\, tr(Id_E) = \lambda n$

$\uparrow$ $\dim E = n$.

Alors $\lambda x = 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\lambda = 0$ et $\ell = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui n'est pas.

Donc il existe un vecteur e_1 tel que $(e_1, \ell(e_1))$ est libre.

c) Posons $e_2 = \ell(e_1)$. (e_1, e_2) est une famille libre de E.

On peut la compléter en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Posons $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$.

1) (e_1) est une base de $D = \mathrm{Vect}(e_1)$

2) $(e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de F. Cette famille est également libre comme sous-famille de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Donc $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de F.

3) $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

Alors D et F sont supplémentaires. Notons que $\ell(e_1) = e_2 \in F$.

Il existe un supplémentaire F de la droite vectorielle D engendrée par e_1 qui contient $\ell(e_1)$.

d) • $\forall y \in F$, $p(f(y)) \in F$. Alors ℓ' est une application de F dans F.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(y_1, y_2) \in F \times F$.

$\ell'(\lambda y_1 + y_2) = p(f(\lambda y_1 + y_2)) \underset{f \text{ est linéaire}}{=} p(\lambda f(y_1) + f(y_2)) \underset{p \text{ est linéaire}}{=} \lambda p(f(y_1)) + p(f(y_2))$.

$\ell'(\lambda y_1 + y_2) = \lambda \ell'(y_1) + \ell'(y_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (y_1, y_2) \in F^2$, $\ell'(\lambda y_1 + y_2) = \lambda \ell'(y_1) + \ell'(y_2)$. ℓ' est linéaire.

Donc ℓ' est un endomorphisme de F.

• Reprenons la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E obtenue dans c)

$\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_n)$ est une base de F.

Posons $A=(a_{ij})=M_{\mathcal{B}}(h)$ et $A'=M_{\mathcal{B}'}(h')$.

$\forall j\in [\![1,n]\!]$, $h'(e_j)=p(h(e_j))=p\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p(e_i)$

Or p est la projection sur $F=\mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_n)$ parallèlement à $D=\mathrm{Vect}(e_1)$.

Ainsi $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $p(e_i)=\begin{cases} e_i & \text{si } i\geq 2 \\ 0_E & \text{si } i=1 \end{cases}$.

donc $\forall j\in [\![2,n]\!]$, $h'(e_j)=\sum_{\underline{\underline{i=2}}}^{n} a_{ij}e_i$.

Alors $A'=M_{\mathcal{B}'}(h')=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

donc $\mathrm{tr}(h')=\mathrm{tr}(A')=\sum_{i=2}^{n} a_{ii}$.

Or $\mathrm{tr}(h)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ donc $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=0$.

Or $h(e_1)=\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i$ et $h(e_1)=e_2$.

Comme $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base : $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $a_{i1}=\begin{cases} 1 & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Retenons que $a_{11}=0$.

Alors $\mathrm{tr}(h')=\sum_{i=2}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\mathrm{tr}(h)=0$. $\underline{\mathrm{tr}(h')=0}$.

Finalement <u>h' est un endomorphisme de trace nulle de F.</u>

Or $\dim F=n-1$. L'hypothèse de récurrence s'applique à h'.

Donc il existe une base $\mathcal{B}'=(e'_2,e'_3,\dots,e'_n)$ telle que les coefficients diagonaux de la matrice de h' dans la base $\mathcal{B}'$ soient nuls.

Posons $e'_1 = e_1$! (e'_1) est une base de D et $(e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de F.

Comme D et F sont supplémentaires : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de E.

Posons $C = (c_{ij}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(h)$. $0 = tr(h) = tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$. $\underline{\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = 0}$.

$\forall j \in [\![2, n]\!]$, $h'(e_j) = p(h(e_j)) = p(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, p(e_i) = \sum_{i=2}^{n} c_{ij} e_i$

Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(h') = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$. Or les coefficients diagonaux de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(h')$ sont nuls. Ainsi $c_{22} = c_{33} = \cdots = c_{nn} = 0$.

Alors $0 = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = c_{11}$. Donc $c_{11} = 0$.

Finalement $c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{nn} = 0$. Les coefficients diagonaux de la matrice de h dans $\mathcal{C}$ sont nuls.

Ceci achève la récurrence.

$\underline{\underline{\text{La condition est bien nécessaire.}}}$

e) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$tr(A) = 0 \iff$ A est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

<u>Exercice..</u> Utiliser ce qui précède pour montrer ce résultat.

(Q3) a) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe deux endomorphismes f et g tels que $h = [f,g]$.

$tr(f \circ g) = tr(g \circ f)$.

$tr\,h = tr([f,g]) = tr(f \circ g - g \circ f) = tr(f \circ g) - tr(g \circ f) = 0$

$tr(h) = 0$.

<u>La condition est suffisante.</u>

b) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $tr(h) = 0$. D'après III Q 2 il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de h dans $\mathcal{B}$ ait ses coefficients diagonaux nuls. Rappelons que $\dim E = n$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Soit f l'endomorphisme de E de matrice $Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathcal{B}$.

Alors f possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

Mieux $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Nous sommes dans les conditions de II Q 7. Nous pouvons alors dire que $Im\,\phi_f$ est l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Dans ces conditions $h \in Im\,\phi_f$. Alors $\exists g \in \mathcal{L}(E)$, $h = \phi_f(g)$.

Donc $h = [f,g]$. <u>La condition est nécessaire.</u>

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. <u>$tr(A) = 0 \iff \exists (B,C) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}),\ A = BC - CB$.</u>

(Q3') a) Supposons que $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $h = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} - 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = [0_{\mathcal{L}(E)}, 0_{\mathcal{L}(E)}]$.

Donc il existe bien deux endomorphismes f et g de E tels que $h = [f,g]$.

b) Dans la suite $h \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a toujours $tr(h) = 0$!

Supposons que pour tout x dans E, $(x, h(x))$ est liée.

Alors d'après I B h est une homothétie vectorielle de E. $\dim E = n$.

$\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h = \lambda Id_E$. Ainsi $0 = tr(h) = tr(\lambda Id_E) = \lambda tr(Id_E) = \lambda n$

$\lambda n = 0$ et $n \neq 0$ donc $\lambda = 0$. Alors $h = 0 . Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci n'est pas.

Donc il existe un vecteur e_1 de E tel que $(e_1, h(e_1))$ est libre.

c) Posons $e_2 = h(e_1)$. (e_1, e_2) est une famille libre de E.

On peut compléter cette famille libre de E en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Posons $A = (a_{ij})$.

$h(e_1) = e_2$ donc $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{31} = a_{32} = \cdots = a_{3n} = 0$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$. $Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. Notons que $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$!

Posons $X = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$. $X \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et ${}^tX = (a_{12} \ a_{13} \cdots a_{1n})$

Posons $A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

De plus $A = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$ ... avec $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

d] $0 = tr(h) = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=2}^{n} a_{ii} = tr(A_1)$.

$\uparrow a_{11} = 0$.

Alors $tr(A_1) = 0$.

Soit h_1 l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n-1}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{K}^{n-1}$ est A_1.

$tr(h_1) = tr(A_1) = 0$. Comme $\dim \mathbb{K}^{n-1} = n-1$, l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe deux endomorphismes f_1 et g_1 de $\mathbb{K}^{n-1}$ tels que : $h_1 = [f_1, g_1]$. $h_1 = f_1 \circ g_1 - g_1 \circ f_1$.

Soit U_1 (resp. V_1) la matrice de f_1 (resp. g_1) dans $\mathcal{B}_1$.

Alors $A_1 = U_1 V_1 - V_1 U_1$

Donc $\underline{\exists U_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}), \exists V_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}), A_1 = U_1 V_1 - V_1 U_1}$.

Supposons que $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $U_1 - \alpha I_{n-1}$ n'est pas inversible.

Alors tout élément de $\mathbb{K}$ est valeur propre de U_1.

Ainsi U_1 possède une infinité de valeurs propres !!

Donc il existe un élément α de $\mathbb{K}$ tel que $U_1 - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.

e] $UV - VU = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha\, {}^tR \\ U_1 S & U_1 V_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & {}^tR U_1 \\ \alpha S & V_1 U_1 \end{pmatrix}$.

produit par blocs ...

$$UV - VU = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\,{}^tR - {}^tR U_1 \\ U_1 S - \alpha S & U_1 V_1 - V_1 U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^tR(U_1 - \alpha I_{n-1}) \\ (U_1 - \alpha I_{n-1}) S & A_1 \end{pmatrix}$$

Alors $A = UV - VU \iff \begin{cases} -{}^tR(U_1 - \alpha I_{n-1}) = {}^tX \\ (U_1 - \alpha I_{n-1}) S = Y \end{cases}$ (*)

Notons que $U_1 - \alpha I_{n-1}$ est inversible.

<u>Posons alors</u> $S = (U_1 - \alpha I_{n-1})^{-1} Y$ et $R = -{}^t\left[{}^tX (U_1 - \alpha I_{n-1})^{-1} \right]$

1/ $S \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $R \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$.

2/ • $(U_1 - \alpha I_{n-1}) S = Y$

• $-{}^tR = {}^tX (U_1 - \alpha I_{n-1})^{-1}$ donc $-{}^tR (U_1 - \alpha I_{n-1}) = {}^tX$.

<u>Posons alors</u> $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix}$.

D'après 1/, 2/ et (*) $A = UV - VU$.

Soit f (resp. g) l'endomorphisme de E de matrice U (resp. V) dans la base $\mathcal{B}$.

$M_\mathcal{B}(h) = A = UV - VU = M_\mathcal{B}(f) M_\mathcal{B}(g) - M_\mathcal{B}(g) M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f \circ g - g \circ f)$.

donc $h = f \circ g - g \circ f = [f, g]$.

Ainsi $\exists (f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $h = [f, g]$.

ceci achève la récurrence.

<u>On retrouve alors pour h dans $\mathcal{L}(E)$ l'équivalence entre les</u>

assertions suivantes.

i) $\mathrm{tr}(h) = 0$

ii) $\exists (f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $h = [f, g] = f \circ g - g \circ f$.

PARTIE IV Réduction de ϕ_f lorsque f est diagonalisable

Q1 Soit $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u_{i,j}(e_k)=\begin{cases} e_i \text{ si } k=j \\ 0_E \text{ si } k\neq j\end{cases}$.

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=(f\circ u_{i,j}-u_{i,j}\circ f)(e_k)=f(u_{i,j}(e_k))-u_{i,j}(f(e_k))$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=f(u_{i,j}(e_k))-u_{i,j}(\alpha_k e_k)=f(u_{i,j}(e_k))-\alpha_k\, u_{i,j}(e_k)$.

$\forall k\in[\![1,n]\!]-\{j\}$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=f(0_E)-\alpha_k 0_E=0_E$.

$\phi_f(u_{i,j})(e_j)=f(u_{i,j}(e_j))-\alpha_j u_{i,j}(e_j)=f(e_i)-\alpha_j e_i=\alpha_i e_i-\alpha_j e_i=(\alpha_i-\alpha_j)e_i$.

$\phi_f(u_{i,j})(e_j)=(\alpha_i-\alpha_j)e_i=(\alpha_i-\alpha_j)\,u_{i,j}(e_j)$.

Notons que $\forall k\in[\![1,n]\!]-\{j\}$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=0_E=(\alpha_i-\alpha_j)\,u_{i,j}(e_k)$.

Ainsi les endomorphismes $\phi_f(u_{i,j})$ et $(\alpha_i-\alpha_j)u_{i,j}$ coïncident sur la base $B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E. Ils sont donc égaux.

Finalement $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\phi_f(u_{i,j})=(\alpha_i-\alpha_j)\,u_{i,j}$.

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $M_B(u_{i,j})=E_{i,j}\neq 0_{M_n(K)}$ donc $u_{i,j}\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $\alpha_i-\alpha_j$ est une valeur propre de ϕ_f et $u_{i,j}$ est un vecteur associé.

Montrons que $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Comme cette famille a pour cardinal n^2 qui est la dimension de $\mathcal{L}(E)$ il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\gamma_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille d'éléments de K telle que $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}u_{i,j}=0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $0_{M_n(K)}=M_B(0_{\mathcal{L}(E)})=M_B\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}u_{i,j}\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\gamma_{i,j}M_B(u_{i,j})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\gamma_{i,j}E_{i,j}$

Comme la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est libre : $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,j}=0$.

ceci achève de montrer que la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est libre.

d'après ce qui a été dit plus haut $(u_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

mieux c'est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de ϕ_f.

Alors $\underline{\underline{\phi_f \text{ est diagonalisable.}}}$

Rappelons que pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_f associé à la valeur propre d_i-d_j. Comme $(u_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$: $\underline{\underline{Sp\,\phi_f=\{d_i-d_j\,;\,(i,j)\in [\![1,n]\!]^2\}}}$ ou

$\underline{\underline{Sp\,\phi_f=\{\lambda_i-\lambda_j\,;\,(i,j)\in [\![1,p]\!]^2\}}}$.

Q2) a) * Soit $g\in \mathrm{Ker}\,\phi_f$. Soit $i\in [\![1,p]\!]$. Soit $x\in SEP(f,\lambda_i)$.

$$\phi_f(g)=0_{\mathcal{L}(E)}.\ \text{Alors } f\circ g-g\circ f=0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$$0_E=f(g(x))-g(f(x))=f(g(x))-g(\lambda_i x)=f(g(x))-\lambda_i g(x).$$

$$0_E=(f-\lambda_i Id_E)(g(x)).\ \text{Alors } g(x)\in SEP(f,\lambda_i).$$

Ainsi $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $\forall x\in SEP(f,\lambda_i)$, $g(x)\in SEP(f,\lambda_i)$. $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $g(SEP(f,\lambda_i))\subset SEP(f,\lambda_i)$.

* Réciproquement soit g un endomorphisme de E tel que :

$\forall i\in [\![1,p]\!]$, $g(SEP(f,\lambda_i))\subset SEP(f,\lambda_i)$. Montrons que $g\in \mathrm{Ker}\,\phi_f$.

$\phi_f(g)=f\circ g-g\circ f$. Soit $x\in E$. $\exists!\,(x_1,\dots,x_p)\in SEP(f,\lambda_1)\times\dots\times SEP(f,\lambda_p)$,

$x=\sum_{i=1}^{p}x_i$. $\phi_f(g)(x)=\phi_f(g)(\sum_{i=1}^{p}x_i)=\sum_{i=1}^{p}\phi_f(g)(x_i)=\sum_{i=1}^{p}(f\circ g-g\circ f)(x_i)$.

$$\phi_f(g)(x)=\sum_{i=1}^{p}\big(f(g(x_i))-g(f(x_i))\big)=\sum_{i=1}^{p}\big(\lambda_i g(x_i)-g(\lambda_i x_i)\big)=\sum_{i=1}^{p}0_E=0_E$$

$x_i\in SEP(f,\lambda_i)$ donc $g(x_i)\in SEP(f,\lambda_i)$.

Alors $\forall x \in E$, $\Phi_f(g)(x) = 0_E$. $\Phi_f(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $g \in \operatorname{Ker} \Phi_f$.

Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Ker} \Phi_f = \{ g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in [\![1,p]\!], g(SEP(f,\lambda_i)) \subset SEP(f,\lambda_i) \}}}$.

__Remarque__ .. $\operatorname{Ker} \Phi_f$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui laissent stables les sous-espaces propres de f.

__b)__ Soit $h \in \operatorname{Ker} \Phi_f$. $SEP(f,\lambda_1), \dots, SEP(f,\lambda_p)$ sont stables par h.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ nous notons h_i l'endomorphisme de $SEP(f,\lambda_i)$ qui à tout x dans $SEP(f,\lambda_i)$ associe $h(x)$.

Posons $\forall h \in \operatorname{Ker} \Phi_f$, $T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p)$.

__T est une application de $\operatorname{Ker} \Phi_f$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.__

Montrons que T est un isomorphisme.

* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(h,\tilde{h}) \in \operatorname{Ker} \Phi_f \times \operatorname{Ker} \Phi_f$.

$T(\lambda h + \tilde{h}) = ((\lambda h + \tilde{h})_1, (\lambda h + \tilde{h})_2, \dots, (\lambda h + \tilde{h})_p)$.

$T(\lambda h + \tilde{h}) = (\lambda h_1 + \tilde{h}_1, \lambda h_2 + \tilde{h}_2, \dots, \lambda h_p + \tilde{h}_p)$

$T(\lambda h + \tilde{h}) = \lambda (h_1, h_2, \dots, h_p) + (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_p) = \lambda T(h) + T(\tilde{h})$.

__T est linéaire.__

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ un élément de $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

Montrons par analyse-synthèse que $\exists!\, h \in \operatorname{Ker} \Phi_f$, $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

* Supposons que h soit un élément de $\operatorname{Ker} \Phi_f$ tel que $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Soit $x \in E$. $\exists!\, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$h(x) = \sum_{i=1}^{p} h(x_i) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)$

$\uparrow$ $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p)$.

Donc $h(x) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)$ si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$

d'où l'unicité de h.

* Soit h l'application de E dans E qui a tout x élément de E tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$ associe $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)$. Notons que $h \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$ et que $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

→ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x,y) \in E^2$.

$\exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$\exists! (y_1, y_2, \dots, y_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i$

$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + y_i)$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda x_i + y_i \in SEP(f,\lambda_i)$.

Alors $h(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(y_i) = \lambda h(x) + h(y)$

$\varphi_i \in \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i))$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Par conséquent h est linéaire.

→ Donc $h \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in SEP(f,\lambda_i)$. Posons $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $x_k = \begin{cases} x & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$

$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$.

Donc $h(x) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \varphi_k(0_E) + \varphi_i(x_i) = \varphi_i(x_i) = \varphi_i(x) \in SEP(f,\lambda_i)$

$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i \in \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i)) \\ x \in SEP(f,\lambda_i) \end{array} \right.$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$, $h(x) \in SEP(f,\lambda_i)$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $h(SEP(f,\lambda_i)) \subset SEP(f,\lambda_i)$.

Donc $h \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$.

→ Nous avons vu que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$, $h(x) = \varphi_i(x)$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$, $h_i(x) = h(x) = \varphi_i(x)$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $h_i = \varphi_i$. Donc $T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Ceci achève de montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ admet un antécédent et un seul dans $\mathrm{Ker}\, \phi_f$ par T.

Ceci pour tout $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

Donc T est une application linéaire bijective de $\mathrm{Ker}\, \phi_f$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

$\mathrm{Ker}\, \phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

c) Posons $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i = \dim SEP(f,\lambda_i)$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\dim \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i)) = n_i^2$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}\, \phi_f = \dim \left(\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$

$\mathrm{rg}\, \phi_f = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \mathrm{Ker}\, \phi_f = n^2 - \sum_{i=1}^{p} n_i^2$

$\dim \mathrm{Ker}\, \phi_f = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$ et $\dim \mathrm{rg}\, \phi_f = n^2 - \sum_{i=1}^{p} n_i^2$ où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i = \dim SEP(f,\lambda_i)$

Si $p = n$: f admet n valeurs propres deux à deux distinctes et $\dim E = n$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\dim SEP(f,\lambda_i) = 1$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $n_i = 1$

Donc $\dim \mathrm{Ker}\, \phi_f = n$ et $\mathrm{rg}\, \phi_f = n^2 - n$.

Remarque.. Nous retrouvons les résultats de II § 7.

PARTIE V f est diagonalisable lorsque ϕ_f est diagonalisable

Q1 a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\Phi_f(g_i)=\beta_i g_i$; $f\circ g_i - g_i\circ f = \beta_i g_i$.

Alors $\beta_i g_i(x) = f(g_i(x)) - g_i(f(x)) = f(g_i(x)) - g_i(\lambda x) = f(g_i(x)) - \lambda g_i(x)$.

donc $f(g_i(x)) = (\lambda+\beta_i)\, g_i(x)$.

b) • φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans E par définition.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(g,h) \in \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$.

$\varphi(\lambda g+h) = (\lambda g+h)(x) = \lambda g(x)+h(x) = \lambda\varphi(g)+\varphi(h)$.

$\forall \lambda\in\mathbb{K}, \forall (g,h)\in\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E), \varphi(\lambda g+h) = \lambda\varphi(g)+\varphi(h)$. φ est linéaire.

• Montrons que φ est surjective. Soit $y \in E$. Montrons qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi(g)=y$ c'est à dire tel que $g(x)=y$.

x est un vecteur propre de f donc x n'est pas nul. Posons $u_1 = x$.

(u_1) est une famille libre de E car u_1 n'est pas nul.

On peut donc compléter cette famille en une base $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ de E. arbitraire !

soit g l'endomorphisme de E tel que $g(u_1)=y$ et $\forall k\in[\![2,n]\!], g(u_k)=0_E$

Alors $g\in\mathcal{L}(E)$ et $g(x)=g(u_1)=y$. Donc $\varphi(g)=y$.

$\forall y\in E, \exists g\in\mathcal{L}(E), \varphi(g)=y$. φ est surjective.

Ainsi φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{L}(E)$ dans E.

c) $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Alors $E = \varphi(\mathcal{L}(E)) = \varphi(\mathrm{Vect}(g_1,g_2,\dots,g_{n^2})) = \mathrm{Vect}(\varphi(g_1),\varphi(g_2),\dots,\varphi(g_{n^2}))$.
↑ φ est surjective

$E = \mathrm{Vect}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n^2}(x))$.

$(g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n^2}(x))$ est donc une famille génératrice de E.

(*) On peut alors extraire de cette famille une base $(g_i(x))_{i\in I}$ de E.

Alors pour tout $i \in I$, $g_i(x) \neq 0_E$.

Mieux : pour tout $i\in I$, $g_i(x) \neq 0_E$ et $f(g_i(x)) = (\lambda+\beta_i)\, g_i(x)$.

Ainsi $(g_i(x))_{i\in I}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Donc <u>f est diagonalisable</u>.

(*) Preuve du résultat de cours (?) proposé.

Posons $\mathcal{L} = \{ L \in \mathcal{P}([\![1,n^2]\!]) \mid L \neq \emptyset \text{ et } (g_i(x))_{i\in L} \text{ libre} \}$

Posons $\hat{\mathcal{L}} = \{ \operatorname{card} L \,;\, L \in \mathcal{L} \}$. $\hat{\mathcal{L}} \subset [\![1,n^2]\!]$.

→ $(g_1(x), \dots, g_{n^2}(x))$ est une famille génératrice de E.

Donc au moins un des vecteurs de cette famille n'est pas nul.

$\exists i_0 \in [\![1,n^2]\!]$, $g_{i_0}(x) \neq 0_E$. $(g_{i_0}(x))$ est libre.

Alors $\{i_0\} \in \mathcal{L}$. Donc $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Ainsi $\hat{\mathcal{L}} \neq \emptyset$.

→ $\hat{\mathcal{L}}$ est une partie non vide de $[\![1,n^2]\!]$. $\hat{\mathcal{L}}$ possède un plus grand élément r. Il existe donc une partie I de $[\![1,n^2]\!]$ de cardinal r telle que $(g_i(x))_{i\in I}$ soit une famille libre de E.

Montrons que cette famille est une base de E. Montrons donc qu'elle est génératrice. Supposons que cette famille n'est pas génératrice. Alors le sous-espace vectoriel F qu'elle engendre est strictement inclus dans $E = \operatorname{Vect}(g_1(x), \dots, g_{n^2}(x))$.

Alors $\exists \ell \in [\![1,n^2]\!]$, $g_\ell(x) \notin F$ (dans le cas contraire $E \subset F$ donc $F = E$).

Notons que $\ell \notin I$ car $g_\ell(x) \notin F$.

Posons $I' = I \cup \{\ell\}$. card $I' = r+1$. Ainsi $I' \notin \mathcal{L}$.

Alors la famille $(g_i(x))_{i\in I'}$ est liée.

Il existe une famille $(\gamma_i)_{i\in I'}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$\sum_{i\in I'} \gamma_i g_i(x) = 0_E$ et telle qu'au moins un élément de cette famille ne soit pas nul.

$\gamma_\ell g_\ell(x) + \sum_{i\in I} \gamma_i g_i(x) = 0_E$. Supposons $\gamma_\ell \neq 0$.

Alors $g_\ell(x) = \sum_{i\in I} \left(-\frac{\gamma_i}{\gamma_\ell}\right) g_i(x) \in F$!! donc $\gamma_\ell = 0$.

Alors $\sum_{i\in I} \gamma_i g_i(x) = 0_E$. Comme $(g_i(x))_{i\in I}$ est libre : $\forall i \in I,\ \gamma_i = 0$.

Finalement $\forall i \in I',\ \gamma_i = 0$ ce qui est contradictoire.

donc $(g_i(x))_{i\in I}$ est une famille génératrice de E. C'est aussi une famille libre donc c'est une base de E.

Q2 $\underline{\underline{\mathbb{K}=\mathbb{C}}}$

a) dim $\mathcal{L}(E) = n^2$ donc $(Id_E, f, \dots, f^{n^2})$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$ car son cardinal est n^2+1.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2+1} - \{0_{\mathbb{C}^{n^2+1}}\},\quad \sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Posons $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$. $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\underline{\underline{f \text{ possède un polynôme annulateur non nul } P.}}$

b) Supposons que P est constant. $\exists c \in \mathbb{C}^*,\ P = c$.

Alors $0_{\mathcal{L}(E)} = P(f) = c\, Id_E$. Or $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $c = 0$!!
car dim $E \geqslant 1$.

Alors P n'est pas constant. Comme $P \in \mathbb{C}[X]$, P est scindé.

$\exists r \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathbb{C}^*, \exists (t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathbb{C}^r$, $P = c(X-t_1)\dots(X-t_r)$.

$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $c(f - t_1 Id_E) \circ \dots \circ (f - t_r Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. c n'est pas nul donc $(f - t_1 Id_E) \circ \dots \circ (f - t_r Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $f - t_k Id_E$ est bijectif.

Alors $(f - t_1 Id_E) \circ \dots \circ (f - t_r Id_E)$ est bijectif comme composé de r endomorphismes bijectifs. Alors $0_{\mathcal{L}(E)}$ est un endomorphisme bijectif de E. Ceci est impossible car $\dim E \geqslant 1$.

Donc $\exists i \in [\![1, r]\!]$ tel que $f - t_i Id_E$ n'est pas bijectif.

Alors $f - t_i Id_E$ n'est pas injectif car $\dim E < +\infty$.

Alors $t_i \in Sp f$.

<u>L'une des racines de P est une valeur propre de f.</u>

<u>Le spectre de f n'est pas vide.</u>

Q3 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous notons $\mathcal{B}$ la base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = A$.

<u>a)</u> Rappelons que $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de ϕ_f respectivement associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$. Posons $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i = M_{\mathcal{B}}(g_i)$.

$\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $\beta_i g_i = \phi_f(g_i) = f \circ g_i - g_i \circ f$.

Alors $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $\beta_i M_i = A M_i - M_i A = \Psi_A(M_i)$.

$\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $\psi_A(M_i) = \beta_i M_i$.

Soit $i \in [\![1, n^2]\!]$, g_i est un vecteur propre de φ_f donc $g_i \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Donc M_i est un vecteur propre de ψ_A associé à la valeur propre β_i.

$(M_1, M_2, \ldots, M_{n^2})$ est une famille de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A. Montrons que cette famille est une base de $M_n(\mathbb{R})$. Comme son cardinal coïncide avec la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que $\sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i M_i = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

Alors $M_B(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_{M_n(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i M_i = \sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i M_B(g_i) = M_B\left(\sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i g_i\right)$

$\sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i g_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. La liberté de $(g_1, g_2, \ldots, g_{n^2})$ donne : $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{n^2} = 0$

ceci achève de montrer que $(M_1, M_2, \ldots, M_{n^2})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$ et même une base de $M_n(\mathbb{R})$.

$(M_1, M_2, \ldots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A.

Alors **ψ_A est diagonalisable.**

$\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i \in M_n(\mathbb{R})$ et $\psi_A(M_i) = \beta_i M_i$. Et $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$ $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$

Alors $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i \in M_n(\mathbb{C})$, $\widehat{\psi}_A(M_i) = \psi_A(M_i) = \beta_i M_i$ et $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{C})}$

$(M_1, M_2, \ldots, M_{n^2})$ est donc une famille de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\widehat{\psi}_A$. Montrons que $(M_1, M_2, \ldots, M_{n^2})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$. Le cardinal de cette famille étant égal à

$\Rightarrow$

la dimension de $M_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que la famille est libre.

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2}$ tel que $\sum_{k=1}^{n^2} \gamma_k M_k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

$$\sum_{k=1}^{n^2} Re(\gamma_k) M_k + i \sum_{k=1}^{n^2} Im(\gamma_k) M_k = 0_{M_n(\mathbb{C})}.$$

or pour tout $k \in [\![1, n^2]\!]$, M_k est une matrice à coefficients réels.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n^2} Re(\gamma_k) M_k = \sum_{k=1}^{n^2} Im(\gamma_k) M_k = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

comme $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$

il vient : $\forall k \in [\![1, n^2]\!]$, $Re(\gamma_k) = Im(\gamma_k) = 0$.

donc $\forall k \in [\![1, n^2]\!]$, $\gamma_k = 0$.

Ainsi $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{C})$.

Récap $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$.

Récap encore $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\widehat{\varphi}_A$ associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$.

Ainsi 1°/ $\widehat{\varphi}_A$ est diagonalisable

2°/ $Sp\ \widehat{\varphi}_A = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}\}$ donc les valeurs propres de $\widehat{\varphi}_A$ sont réelles.

b) $A \in M_n(\mathbb{R})$ donc $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

d'après Q2 (!!) $Sp\ h \neq \emptyset$. Alors $Sp_{\mathbb{C}} A \neq \emptyset$.

Or $\mathrm{Sp}\, f = \emptyset$ par hypothèse donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$ ... et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \neq \emptyset$

Alors il existe un complexe non réel γ valeur propre de A.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $AX = \gamma X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

En conjuguant il vient : $\overline{A}\,\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\gamma}\,\overline{X}$ et $\overline{X} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Or $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\overline{A} = A$. Ainsi $A\overline{X} = \overline{\gamma}\,\overline{X}$ et $\overline{X} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$

donc $\overline{\gamma} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$. $A - \overline{\gamma} I_n$ n'est pas inversible. Donc ${}^t(A - \overline{\gamma} I_n)$ n'est

pas inversible. Alors ${}^tA - \overline{\gamma} I_n$ n'est pas inversible. $\overline{\gamma}$ est valeur propre de ${}^tA$.

$\overline{\gamma}$ est valeur propre de A et de ${}^tA$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $AX = \gamma X$ $\quad (\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A)$.

$\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et ${}^tA Y = \overline{\gamma} Y$ $\quad (\overline{\gamma} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} {}^tA)$.

Notons que $X\,{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\widehat{\varphi}_A(X\,{}^tY) = AX\,{}^tY - X\,{}^tY A = \gamma X\,{}^tY - X\,{}^t({}^tA Y) = \gamma X\,{}^tY - X\,{}^t(\overline{\gamma} Y)$.

$\widehat{\varphi}_A(X\,{}^tY) = \gamma X\,{}^tY - \overline{\gamma} X\,{}^tY = (\gamma - \overline{\gamma}) X\,{}^tY$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\exists p \in [\![1, n]\!]$, $x_p \neq 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$\exists q \in [\![1, n]\!]$, $y_q \neq 0$ car $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $x_p y_q \neq 0$. Or $x_p y_q$ est le coefficient de $X\,{}^tY$ situé à l'intersection

de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne donc $X\,{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

$\widehat{\varphi}_A(X\,{}^tY) = (\gamma - \overline{\gamma}) X\,{}^tY$ et $X\,{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Ainsi $\gamma - \overline{\gamma}$ est une valeur propre de $\widehat{\varphi}_A$.

car $\gamma - \bar{\gamma} = 2i\, \mathrm{Im}\, \gamma$ et $\mathrm{Im}\, \gamma$ n'est pas un réel nul car $\gamma \notin \mathbb{R}$.

Alors $\gamma - \bar{\gamma}$ est une valeur propre de $\hat{\varphi}_A$ qui n'est pas réelle.

cela contredit Q3 a).

Q4 En supposant $\mathrm{sp}\, f = \emptyset$ nous avons obtenu une contradiction.

Alors f possède au moins une valeur propre.

Q1 permet alors de dire que f est diagonalisable.

Donc si φ_f est diagonalisable : f est diagonalisable.

mieux φ_f est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable...

d'après Q4.