

Simulation CB

Reduction à Niveau 2

Thème : Les Projecteurs spectraux

(Inspiré du CCP 2023)

$K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  tq  $n \geq 2$ ,  $E$   $K$ -ev de dim fin.  
 $\dim E = n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$

Partie I : Préliminaires

1) Énoncer et démontrer le lemme de décomposition  
des noyaux

2) Mq  $u$  admet un poly<sup>annulateur</sup> scindé (resp à racines  
simples)

$\Rightarrow \Pi_u$  est scindé ( " " )

$\Rightarrow \chi_u$  est scindé ( " " )

Partie II : Cas glé

on pose  $\Pi_u(x) = \prod_{i=1}^m P_i^{\alpha_i}(x)$  tq  $P_i(x)$  polynômes  
irréductible  
tq  $P_i \neq P_j \quad \forall i \neq j$

1) Mq  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u)$

2) Mq  $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^m P_i^{\beta_i}(x)$  tq  $\alpha_i \leq \beta_i \quad \forall i \in \{1, m\}$

3) Mq  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker } P_i^{\beta_i}(u)$

4) En déduire que  $\text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u) = \text{Ker } P_i^{\beta_i}(u) \quad \forall i \in \{1, m\}$

(1)

⑤ On pose  $Q_i(x) = \frac{\pi_u(x)}{P_i^{d_i}(x)}$

i) Justifier l'existence de polynôme  $R_1, \dots, R_m$   
 tq  $Q_1 R_1 + \dots + Q_m R_m = 1$

ii) Pour tout  $i \in \{1, m\}$ , on pose  $P_i = (Q_i R_i)(u) \in \mathcal{L}(E)$

a) Mq  $\text{id}_E = \sum_{i=1}^m P_i$

b) Mq  $\pi_u(x)$  divise  $(Q_i R_i Q_j R_j)(x) \quad \forall i \neq j$

c) En deduire que  $P_i \circ P_j = 0 \quad \forall i \neq j$

d) En deduire que  $P_i^2 = P_i$

indic : utiliser ii) a et ii) c

Ainsi les  $P_i$  sont des projecteurs (un peu particuliers)  
 on les appelle les projecteurs spectraux

autre III : Cas trigonalisable

on pose  $\pi_u(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$  (scindé)

$\chi_u(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{\beta_i}$  (souple)  $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

tq  $\alpha_i \leq \beta_i$ , car  $P_i(x) = x - \lambda_i$   
 $\forall 1 \leq i \leq m$

②

① Mq  $E = \text{Dnp}_1 + \dots + \text{Dnp}_m$

② Soit  $x \in \text{Dnp}_1 + \dots + \text{Dnp}_m$

on pose  $x = x_1 + \dots + x_r$  tq  $x_i \in \text{Dnp}_i$   
 $\forall 1 \leq i \leq m$

avec  $x_i = p_i(y_i)$  tq  $y_i \in E$

i) Mq  $p_j(x) = x_j \quad \forall 1 \leq j \leq m$

ii) En deduire que l'écriture de  $x$  dans  $\text{Dnp}_1 + \dots + \text{Dnp}_m$  est unique

iii) En deduire que  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Dnp}_i$

③ ~~En pose~~ Mq  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{d_i}$

④ Mq  $\text{Dnp}_i \subset \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{d_i} \quad \forall 1 \leq i \leq m$

⑤ En deduire que  $\text{Dnp}_i = \bigoplus_{j=1}^{d_i} \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{d_i}$   
 $\forall 1 \leq i \leq m$

indice : utiliser 2-iii) - 3 et 4

Partie II : Cas diagonalisable

on pose  $\pi_u(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)$  (scindé à racines simples)

$\chi_u(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{p_i}$  (scindé)  
 $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

$Q_i(x) = \frac{\pi_u(x)}{x - \lambda_i}$

(3)

① ~~Montrer~~  $M_q Q_i(\lambda_i) \neq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$

②  $M_q$  la décomposition en elt simple de la fraction  $\frac{1}{P_u(x)}$  est exactement de la forme

$$\frac{1}{P_u(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{Q_i(\lambda_i)(x - \lambda_i)}$$

③ En déduire que  $\sum_{i=1}^m \frac{Q_i(x)}{Q_i(\lambda_i)} = 1$

④ En déduire que  $\forall i \quad p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} \quad \forall 1 \leq i \leq m$

⑤ i) Rappeler les informations que vous connaissez sur les polynômes de Lagrange

ii) En déduire que  $X = \sum_{i=1}^m \lambda_i L_i(X) \quad \text{ou } L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$

⑥ Conclure que  $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$

cette écriture s'appelle décomposition spectrale de  $u$

ind $\leq$  : utiliser 4) et 5-ii)

⑦ ~~Montrer~~ i) Justifier que  $u \circ p_i = p_i \circ u \quad \forall 1 \leq i \leq m$

ii) " "  $u \circ p_j = \lambda_j p_j \quad \forall 1 \leq j \leq m$

iii) En déduire que  $u^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 p_i$

iv)  $M_q \quad u^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(4)

8) On pose  $K(u) = \{ P(u) \mid P \in K(X) \}$

N.B  
ce résultat  
n'est  
vrai dans  
le cas  
général

- i) On a  $K(u)$  est une sous-algèbre de  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, 0)$   
appelée s. alg engendrée par  $u$
- ii) On a  $\dim K(u) = \deg \pi_u(X) = m$   
indice : On a  $(1, u, \dots, u^{m-1})$  base de  $K(u)$

N.B  
ce résultat  
est vrai  
qd  $u$  diagonalisable

- iii) On démontre que  $K(u) = \text{Vect}(p_1, \dots, p_m)$   
Autrement dit : dans le cas diagonalisable  
les projecteurs spectraux engendrent  $K(u)$

9) On traite ici un cas particulier :  $u \in \mathcal{L}(E)$  tq  $u^2 = 0$   
et  $u \neq 0$

- i) Justifier que  $\pi_u(X) = X^2$
- ii)  $u$  est-il diagonalisable
- iii) Justifier que  $u$  admet un seul projecteur spectral
- iv) " "  $\dim K(u) = 2$
- v) le résultat de 8-iii) est-il toujours vrai  
dans le cas non diagonalisable

## Partie IV : Etude d'une réciproque

on suppose  $\deg \pi_u(x) = m$

et que il existe  $m$  endom:  $f_1, \dots, f_m$

~  $m$  scalaire:  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  tq  $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\text{tq } u^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k f_i \quad \forall k \neq j$$

1) Mg  $\forall P \in K(x)$  on a  $P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i$

2) En deduire que  $P(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)$  est un poly annulateur de  $u$

3) En deduire que  $u$  est diagonalisable

4) Justifier que  $\pi_u(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)$  et que  $\text{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$

5) i) Justifier que  $K(u) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_m)$

ii) En deduire que  $\{f_1, \dots, f_m\}$  est libre dans  $L(E)$

6) Comme  $u$  est mt diagonalisable on peut utiliser les résultats de III

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } K(u) &= \text{Vect}(f_1, \dots, f_m) = \text{Vect}(p_1, \dots, p_m) = \text{Vect}(u, u^2, \dots, u^{m-1}) \\ &= \text{Vect}(\beta_1) = \text{Vect}(\beta_2) = \text{Vect}(\beta_3) \end{aligned}$$

i) Donner  $P_{\beta_1 \rightarrow \beta_3}$  puis  $P_{\beta_2 \rightarrow \beta_3}$

ii) Vérifier que  $P_{\beta_1 \rightarrow \beta_3} = P_{\beta_2 \rightarrow \beta_3}$

iii) En deduire que  $P_{\beta_1 \rightarrow \beta_2} = I_m$  puis que  $\beta_1 = \beta_2$

7) Conclure un résultat glb

8) Que deviennent les résultats de IV si on enlève l'hypothèse  $\deg \pi_u(x) = m$

FIN