

Simulation CB
Réduction : Niveau 3

Thème : endom cycliques et applications
Inspiré du Centrale 2019
et CNC 1999

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tq $n \geq 2$

E un K -ev de dim fini et $u \in \mathcal{L}(E)$

Def u est dit cyclique ss $\exists x_0 \in E$ tq
 $\beta = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E

dans ce cas $M(u)_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
matrice compagnon

Partie I : Propriétés des endom cycliques

Dans toute cette partie on suppose que u est cyclique

1) Mg $\chi_u(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$

induc : utiliser l'opération élémentaire suivante

$$L_1 \leftarrow L_1 + X L_2 + \dots + X^{n-1} L_n$$

(1)

2) Pour simplifier on pose $e_i = u^{i-1}(x_0) \quad \forall 1 \leq i \leq n$

i) Mg $X(u)(e_1) = 0$

ii) En deduire que $X(u)(e_i) = 0 \quad \forall 2 \leq i \leq n$

iii) Conclure que $X(u) = 0$

Ainsi on a démontré le thm de Cayley-Hamilton pour le endom cyclique

3) i) Mg $\{id, u, \dots, u^{n-1}\}$ est libe dans $L(E)$

ii) En deduire que $\deg \pi_u \geq n$

iii) En deduire que $[u \text{ cyclique} \Rightarrow X_u = \pi_u]$

4) on pose $K(u) = \{v = P(u) \text{ tq } P \in K(x)\}$
algebre engendree par u

$C(u) = \{v \in L(u) \text{ tq } v \circ u = u \circ v\}$
commutant de u

i) Mg $K(u) = \text{Vect}(id, u, \dots, u^{n-1})$ et que $\dim(K(u)) = n$

ii) Dire pourquoi $K(u) \subset C(u)$

iii) Soit $v \in C(u)$

a) Justifier l'existence de $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in K$ tq $n-1$
 $v(e_1) = P(u)(e_1)$ ou $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$

b) En deduire que $v(e_i) = P(u)(e_i) \quad \forall 2 \leq i \leq n$

c) ~ " ~ $v = P(u)$ puis que $v \in K(u)$

(2)

Ainsi on a démontré que

$$\boxed{\mu \text{ cyclique} \Rightarrow K(\mu) = C(\mu) = \text{Vect}(id_E, \mu, \dots, \mu^{n-1}) \text{ et leur dimension est égale à } n}$$

Partie II : Une demo de Cayley Hamilton

Soit $x \in E$ fixe, $x \neq 0_E$, $\mu \in \mathcal{L}(E)$ qd

on pose $m = \max\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } (x, \mu(x), \dots, \mu^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$

- 1) Justifier l'existence de m .
- 2) On démontre que $(x, \mu(x), \dots, \mu^{m-1}(x))$ est libre et que $\exists P \in K(X)$ tq $\mu^m(x) = P(\mu)(x)$
- 3) On démontre que $F = \text{Vect}(x, \mu(x), \dots, \mu^{m-1}(x))$ est stable par μ et que $\mu|_F$ est cyclique puis que $\chi_{\mu|_F}(x)$ divise $\chi_\mu(x)$

4) Dire pourquoi $\chi_{\mu|_F}(x) = 0$ puis que $\chi_\mu(x) = 0$

5) Conclure que $\boxed{\chi_\mu(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{L}(E)}$

Thm de Cayley-Hamilton

Partie III : Etude d'une réciproque

on se propose de montrer ici que

$$\boxed{\text{Si } \mu \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \chi_\mu = \prod \text{ alors } \mu \text{ est cyclique}}$$

On suppose alors que $\chi_\mu(x) = \prod (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$

$$\text{tq } \sum_{i=1}^m \alpha_i = n \quad \text{et } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$$

(3)

1) Mg $\{id_E, f, \dots, f^{n-1}\}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

2) on pose $F_i = \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ $\forall 1 \leq i \leq m$

Dire pourquoi les F_i sont tous stables par u

et que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$

3) Justifier que $(f - \lambda_i id_E)|_{F_i}$ est nilpotent

d'indice $\beta_i \leq \alpha_i = \dim F_i$

↑
résultat du cours

4) On pose $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\beta_i}$

i) Mg $P(u|_{F_i}) = 0$ $\forall 1 \leq i \leq m$

ii) En deduire que $P(f) = 0$ puisque $\prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise $P(X)$

iii) $n \leq \sum_{i=1}^m \beta_i \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i \leq n$

iv) Conclure que $\alpha_i = \beta_i = \dim F_i$ $\forall 1 \leq i \leq m$

5) Montrer ce résultat :

si F sev de E stable par u

si $u|_F$ nilpotent d'indice $\beta = \dim F$

alors $u|_F$ est cyclique

6) En deduire que $(u - \lambda_i id_E)|_{F_i}$ est cyclique
 $\forall 1 \leq i \leq m$

7) on pose alors $\beta_i = (x_i, u(x_i), \dots, u^{\alpha_i-1}(x_i))$ une base
de F_i

(4)

i) Mq $M(u/F_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$ de taille $d_i = p_i = \dim F_i$

ii) on pose $\beta = \bigcup_{i=1}^m \beta_i$. Justifier que β base de E

iii) En deduire que $M(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}$

tg $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$

8) on pose $\alpha_0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$

i) Mq $\forall P \in K(X)$ on a $P(u)(\alpha_i) = 0 \Leftrightarrow (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise $P(X)$
 $\Downarrow$
 $P(u)(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in F_i$

ii) En deduire que $\forall P \in K(X)$

$P(u)(\alpha_0) = 0 \Leftrightarrow P(u)(\alpha_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$
 $\Leftrightarrow P(u)/u = 0 \quad \forall \alpha \in E \quad \Leftrightarrow \chi_u(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise $P(X)$

iii) En deduire que $(\alpha_0, u(\alpha_0), \dots, u^{n-1}(\alpha_0))$ est libre

iv) Conclure que u cyclique

Ainsi on a démontré ceci

$$\boxed{\chi_u(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \Rightarrow u \text{ cyclique}}$$

Partie IV : Etude d'autre réciproque

1) On suppose ici que $\dim K(u) = n$

i) Mg $K(u) = \text{Vect}(1_E, u, \dots, u^{n-1})$

indic : utiliser une div euclidienne sur $\chi_u(x)$

ii) En deduire que $(1_E, u, \dots, u^{n-1})$ libe de $\mathcal{L}(E)$

iii) En deduire que $\pi_u(x) = \chi_u(x)$

indic : utiliser I-3

iv) " " " cyclique

indic : utiliser III-8

Ainsi on a démontré que

$$\boxed{\dim K(u) = n \Rightarrow u \text{ cyclique}}$$

2) On suppose ici que $(1_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libe de $\mathcal{L}(E)$

i) Mg $\deg \pi_u(x) \geq n$

ii) En deduire que $\pi_u(x) = \chi_u(x)$

iv) " " " cyclique

Jusqu'à maintenant on a montré que

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u \text{ cyclique} & \Leftrightarrow \pi_u(x) = \chi_u(x) & \Leftrightarrow \dim K(u) = n \\ \Downarrow & & \Updownarrow \\ C(u) = K(u) & & (1_E, u, \dots, u^{n-1}) \text{ libe de } \mathcal{L}(E) \end{array}}$$

(6)

Partie I : Un resultat utile

1) Pour tout $x \in E$ tq $x \neq 0$, on pose $I_x = \{p \in K(x) \text{ tq } p(u)(x) = 0\}$

Mq I_x ideal de $K(x)$

on pose π_x le poly unitaire minimal qui engendre I_x

2) Mq π_x divise π_u $\forall x \in E$ tq $x \neq 0_E$

3) En deduire $\exists \pi_x$ tq $x \in E, x \neq 0_E$ est fini

on pose $\{\pi_x, \text{ tq } x \in E, x \neq 0_E\} = \{\pi_{x_1}, \dots, \pi_{x_r}\}$
ou $r \in \mathbb{N}^*$

4) Mq $\text{Ker}(\pi_{x_i}(u))$ est un sev de E , $\forall 1 \leq i \leq r$

et que $E = \bigcup_{i=1}^r (\text{Ker } \pi_{x_i}(u))$

5) Montre ce resultat gle

si $(F_i)_{1 \leq i \leq r}$ des sev de E tq $\bigcup_{i=1}^r F_i$ est un sev de E

Alors $\forall 1 \leq j \leq r$ tq $F_i \subset F_j$ $\forall 1 \leq j \leq r$

6) En deduire que $\exists 1 \leq j \leq r$ tq $E = \text{Ker } \pi_{x_j}(u)$

puis que $\pi_{x_j}(u) = 0$

7) En deduire $\exists 1 \leq j \leq r$ tq $\pi_u(x) = \pi_{x_j}(x)$

Ainsi on a demontre ce resultat

$\pi_x(x)$ divise $\pi_u(x)$ $\forall x \in E$
$\exists x \in E$ tq $\pi_u(x) = \pi_x(x)$

7

Partie VI : Un peu de dualité (en dim finie)

on appelle forme linéaire sur E toute app linéaire

$$\varphi: E \rightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

on pose $E^* = \mathcal{L}(E, K) = \{ \varphi: E \rightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ linéaire} \}$

E^* s'appelle le dual de E

$$\text{on a bien } \boxed{\dim E^* = \dim E}$$

1) Mg si $\varphi \in E^*$ est non nulle alors

i) φ est surjective

ii) $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E

$$\text{car } \dim \text{Ker } \varphi = n-1$$

2) ~~Mg~~ Soit H hyperplan de E et Ka un supp de H

$$\text{car } E = H \oplus Ka$$

Autrement dit $\forall x \in E, \exists ! h_x \in H, \exists ! \lambda_x \in K$ tq

$$x = h_x + \lambda_x \cdot a$$

$$\text{on pose } \varphi: E \rightarrow K$$
$$x \mapsto \lambda_x$$

i) Mg φ est bien définie

ii) Mg φ est linéaire

iii) Mg $H = \text{Ker } \varphi$

Ainsi on a démontré ceci

$$\boxed{H \text{ hyperplan de } E \text{ ssi } \exists \varphi \in E^* \text{ tq } \varphi \neq 0 \text{ et } H = \text{Ker } \varphi}$$

3) Soit $\varphi, \psi \in E^*$ non nulle tq $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$

$$\text{Mg } \exists \lambda \in K \text{ tq } \varphi = \lambda \psi$$

4) Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

$$\leadsto \text{Mq l'app } \mu: E^* \longrightarrow K^n \\ \varphi \longmapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

est un isomorphisme

ii) Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de K^n

$$\text{Autrement dit } \varepsilon_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1}^{\text{er}} \text{ place}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$\text{on pose } e_i^* = \varphi^{-1}(\varepsilon_i)$$

Dire pour qu'il $\beta^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*

$$\text{et que } e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

β^* s'appelle la base duale de β

iii) Soit $x \in E$ on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\text{mq } \forall 1 \leq i \leq n, \text{ on a } e_i^*(x) = x_i$$

9

Partie VII : Décomposition de Frobenius

On se propose de mg toute matrice carrée et semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs sont des matrices compagnon

Soit $u \in L(E)$ endom q
selon VI, $\exists \xi_1 \in E$ tq $\pi_u(x) = \pi_{\xi_1}(x)$

on pose $d = \deg \pi_u(x) = \deg \pi_{\xi_1}(x)$

et $F_1 = \text{Vect}(\xi_1, u(\xi_1), \dots, u^{d-1}(\xi_1))$

1) Mg $(\xi_1, u(\xi_1), \dots, u^{d-1}(\xi_1))$ est libre
en deduire que $\dim F_1 = d$

2) En deduire que $(\xi_1, u(\xi_1), \dots, u^{d-1}(\xi_1))$ est une base de F_1

3) Mg $u^d(\xi_1) \in F_1$ puis que F_1 est stable par u
ind'ic : div euclidienne de X^d par $\pi_{\xi_1}(x)$

3) En deduire que $u|_{F_1}$ est cyclique

et que $\pi_{u|_{F_1}}(x) = \pi_u(x)$

2) On pose $\xi_j = u^{j-1}(\xi_1) \forall 1 \leq j \leq d$

qu'on complete avec $\xi_{d+1}, \dots, \xi_n$ pour
avoir $\beta = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ une base de E

tq $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ base de F_1

on pose $F = \{x \in E \text{ tq } \xi_j^* (u^k(x)) = 0 \forall k \in \mathbb{N}\}$

1) Mg F est un sev de E stable par u

10

ii) Vérifier que $F_1 \cap F = \{0\}$

3) Mg $\phi : F_1 \rightarrow K^d$

$$x \mapsto (\xi_d^*(x), \xi_d^*(u(x)), \dots, \xi_d^*(u^{d-1}(x)))$$

est un isom

4) En deduire cette fois que

$$\psi : E \rightarrow K^d$$

$$x \mapsto (\xi_d^*(x), \xi_d^*(u(x)), \dots, \xi_d^*(u^{d-1}(x)))$$

est surjective, puis que $E = F_1 \oplus \text{Ker } \psi$
 indique : remarquer que $\text{Im } \phi \subset \text{Im } \psi$

5) Mg $\text{Ker } \psi = F$

indique : utiliser VI.4.iii

6) En deduire que $E = F_1 \oplus F$

Ainsi

$$E = F_1 \oplus F$$

F_1 et F stable par u
 $u|_{F_1}$ cyclique
 $\pi_{u|_{F_1}} = \pi_u$ et $\pi_{u|_F}$ divise $\pi_{u|_{F_1}}$

8) En deduire que il existe $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces stables par u tq

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$$

$u|_{F_i}$ cyclique $\forall 1 \leq i \leq k$

$\pi_{u|_{F_{i+1}}}$ divise $\pi_{u|_{F_i}}$ $\forall 1 \leq i \leq k-1$

9) Conclure

(11)

Partie VIII : Deux applications intéressantes

Selon VII, toute matrice $A \in M_n(K)$ est semblable à une matrice de la forme

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{C_k} \end{pmatrix}$$

où tous les C_i sont des matrices compagnon

1) Une autre demo du thm de Cayley - Hamilton

i) Dire pourquoi $\chi_{C_i}(C_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k$

indice : utiliser I-2

ii) " " $\chi_{C_i}(x)$ divise $\chi_C(x) \quad \forall 1 \leq i \leq k$

iii) En deduire que $\chi_C(C_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k$

puis que $\chi_C(C) = 0$

iv) En deduire que $\chi_A(A) = 0$

2) On se propose de mg $\boxed{\dim C(u) \geq n}$
pour cela $\forall u \in L(E)$

On utilise les notations de VII. 8

$\forall x \in E \quad \exists ! x_i \in F_i \text{ tq } x = x_1 + \dots + x_k$

i) Mg l'application $\phi: \mathcal{L}(E) \times \dots \times \mathcal{L}(F_k) \rightarrow \mathcal{L}(E)$
 $(X_1, \dots, X_k) \mapsto X$

$$\text{tg } X(x) = X_1(x_1) + \dots + X_k(x_k)$$

est bien définie, linéaire et injective

ii) Soit $v_i \in C(u/F_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k$

$$\text{cad } v_i \circ u/F_i = u/F_i \circ v_i \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

mg $v \in C(u)$ où $v = \phi(v)$ défini ds i) précédemment

iii) En deduire que $\dim C(u) \geq \dim \bigcap_{i=1}^k C(u/F_i)$

iv) dire pourquoi $\dim C(u/F_i) = \dim F_i \quad \forall 1 \leq i \leq k$
 indic : utiliser la conclusion de I

v) Conclure ce resultat

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \dim C(u) \geq n}$$

Partie IX : La Fin

On se propose de mg $\boxed{K(u) = C(u) \implies u \text{ cyclique}}$

1) Mg $K(u) = C(u) \implies \deg \pi_u \geq n$

indic : utiliser que $\dim K(u) = \deg \pi_u$

2) En deduire que $K(u) = C(u) \implies \pi_u = \chi_u \implies u \text{ cyclique}$

3) On peut maintenant conclure ce qui

$$\boxed{\begin{array}{l} u \text{ cyclique} \Leftrightarrow \pi_u(x) = \chi_u(x) \Leftrightarrow \dim K(u) = n \\ \updownarrow \qquad \qquad \qquad \updownarrow \\ C(u) = K(u) \Leftrightarrow (id_E, u, \dots, u^{n-1}) \text{ libre ds } \mathcal{L}(E) \end{array}}$$

(13)

FIN