CPGE Ibn Ghazi
MP* 1 Rabat

Prof. MAMOUNI
myismail.net

(1) Probas VAR continue à densité

EX 1 Loi du max / Loi du min

Soit X, Y deux VAR continue à densité indépdt tq $X(\Omega)=Y(\Omega)$

① Mq $F_{max(X,Y)}(x)=F_X(x)F_Y(x)$
$1-F_{min(X,Y)}=(1-F_X)(1-F_Y)$

② En déduire la loi de $\max(X,Y)$ qd $X\sim Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

③ - - - - - - $\min(X,Y)$ qd $X\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$, $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(\mu)$

EX 2 Loi de X + Y ds le cas Gaussienne

Soit $X\hookrightarrow\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$, $Y\hookrightarrow\mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$ X et Y indépdts

on rappelle que $f_{X+Y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t)f_Y(x-t)\,dt$

① On suppose ici que $X\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{N}(0,s^2)$

(i) Mq $f_{X+Y}(x)=\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2v^2}}}{2\pi s}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{s}t-\frac{x}{sv}\right)^2\right)dt$

où $v=\sqrt{1+s^2}=\sqrt{1+s^2}$

(ii) En déduire que $f_{X+Y}(x)=\dfrac{e^{-x^2/2v^2}}{v\sqrt{2\pi}}$

(iii) Conclure $X+Y\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1+s^2)$

②

② on revient au cas gle $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$

(i) Mq $X' = \frac{X - m_1}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$Y' = \frac{Y - m_2}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right)$

(ii) On deduire que $X' + Y' \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, 1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right)$

(iii) On deduire que $\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$

indic $X + Y = \sigma_1(X' + Y') + m_1 + m_2$

Ex3/ loi de $X+Y$ ds le cas de loi de Gamma

on suppose ici que $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$ cad $f_X(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-t}$ si $t > 0$, 0 sinon

$\alpha > 0$ où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$

1) Mq la loi de X est bien definie

2) Mq $E(X)$ est bien definie et que $E(X) = \alpha$

indic : Mq $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

3) Mq $V(X)$ - - - - - . . $V(X) = \alpha$

indic : mq $E(X^n) = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + i)$

4) Mq $\int_0^x t^{\alpha-1} (x-t)^{\beta-1} dt = x^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$

⑤ Soit $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$ et $Y \hookrightarrow \gamma(\beta)$ tq X et Y indépd

ⓘ Justifier que $f_{X+Y}(x) = \int_0^x f_X(x-t) f_Y(t)\,dt$

ⓘⓘ En déduire que $f_{X+Y}(x) = \lambda e^{-x} x^{\alpha+\beta-1}$

ⓘⓘⓘ Dire pourquoi $\lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

ⓘⓥ Conclure que $X+Y \hookrightarrow \gamma(\alpha+\beta)$

Ex 4 / VAR à densité sans mémoire

① Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ mq $p(X > a+b \mid X > a) = p(X > b)$ $(*)$

② Soit X VAR continue à densité vérifiant $(*)$

ⓘ Determiner les fct $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $g(a+b) = g(a)g(b)$ $\forall a, \forall b \geq 0$

ⓘⓘ En déduire que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Scanné avec CamScanner

Ex 5/ Une Inegalite

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

1) mq $p(|X| \geq x) \leq \frac{1}{x^2}$

2) mq $p(|X| \geq x) = 2(1 - F_X(x))$

3) En deduire $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}$

Ex 6/ Une limite

1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ tq X, Y independt

mq $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

2) Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ independt tq $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$

i) Mq $p(\overline{X}_n \leq 1) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!}$ où $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

ii) En deduire que $\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = 1/2$

indic : thm de limite centrée

EX 7/ Une autre limite

$(X_i)_{1 \leq i \leq n} \hookrightarrow G(p)$ et independt

1) Donner $E(\overline{X}_n)$ et $V(\overline{X}_n)$

2) En deduire $\lim_{n \to +\infty} p\left(0 \leq \overline{X}_n - \frac{1}{p} \leq \sqrt{\frac{1-p}{np^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt$