

TD : Derivation
VectorielleG1Exo 1 / pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & x & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^2}{2!} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x^h}{h!} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x^2}{2!} & x & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

1) Justifier que la fct $x \mapsto \Delta_n(x)$ est dérivable2) En deduire $\Delta_n(x)$ en fct de $\Delta_n(x)$ 3) " " que la fct $x \mapsto \Delta_n(x)$ est de classe C^∞ 4) Exprimer $\Delta_n(x)$ en fct de x et n Exo 2 / fct = exp vectSoit E algèbre normée de dim finie $= n \geq 2$ pour tout $a \in E$ on pose $e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ 1) Mq pour tout $a \in E$ on a $\left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right\| \leq \exp(\|a\|) - 1 - \|a\|$ 2) on considère une fct vect $a: \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable
 $t \mapsto a(t)$ tq $a(t).a(h) = a(h).a(t)$ pour tout t, h i) Mq la fct vect $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ est
 $t \mapsto e^{a(t)}$ dérivable avec $(e^{a(t)})' = a'(t) e^{a(t)}$

(1)

pour tout $t \in \mathbb{R}$

ii) En deduire ~~par~~ la forme gde de vol de l'eq
diff vect d'ordre 1 : $x'(t) = a(t).x(t)$

où $x: \mathbb{R} \rightarrow \bar{E}$ fut vect dérivable
 $t \mapsto x(t)$

3) Soit $a \in E$ fixe

i) Justifier que le fut vect $f: \mathbb{R} \rightarrow E$
 $t \mapsto e^{ta}$
est dérivable avec $(e^{ta})' = a e^{ta} = e^{ta} \cdot a$
pour tout $t \in \mathbb{R}$

Ex 03 / fut cos et sin vectoriels

Soit E alg normé de dim finie $n \geq 2$

pour tout $a \in E$ on pose $\cos(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} a^{2n}$

$$\sin a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1}$$

1) Justifier que $\cos(a)$ et $\sin(a)$ sont bien définies

2) Justifier que $iE = \{ia \mid a \in E\}$ est aussi
algèbre normée de dim finie

3) Mg pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

i) $\cos a + i \sin a = e^{ia}$

ii) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1_E$

Et plein d'autres formules

4) A l'aide du produit de Cauchy et sans utiliser Qst 3, montrer que : $\sin(2.a) = 2.\sin(a).\cos(a)$

(2)

Ex 4 / IAF : Inégalité de accroissements finis

1) Soit E euclidien et $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ fct vect
cont sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

$$\text{Mq } \forall t \in]a, b[\quad t_q \quad \|f(b) - f(a)\| \leq (b-a) \|f'(t)\|$$

Indic: utiliser IAF pour la fct réelle
 $\phi(t) = \langle f(b) - f(a), f(t) \rangle$

2) Soit E evn de dim finie $n \geq 2$

$f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ fct vect dérivables

$$t_q \quad \|f'(t)\| \leq \|g'(t)\| \quad \forall t \in [a, b]$$

pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $A_\varepsilon = \left\{ x \in [a, b] \quad t_q \quad \begin{aligned} &\|f(b) - f(a)\| \\ &\leq \|g(b) - g(a)\| \\ &\quad + \varepsilon (b-a) \end{aligned} \right\}$
 $\forall t \in [a, x]$

i) Mq A_ε admet une borne sup

ii) Mq A_ε fermé

iii) En deduire que $\sup(A_\varepsilon) \in A_\varepsilon$

iv) Mq $\sup(A_\varepsilon) = b$ Indic: par l'absurde

v) En deduire que $\|f(b) - f(a)\| \leq \|g(b) - g(a)\|$

Ex 5 / Ex. Def: Inégalité de Kolmogorov

Soit $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ fct vect de classe $\mathcal{C}^2$

$$1) \text{ Mq } \|f'(x)\| \leq \frac{2}{h} \|f\|_{\infty} + h \cdot \frac{\|f''\|_{\infty}}{2} \quad \text{pour tout } x \in [a, b] \text{ et } h > 0$$

$$2) \text{ En deduire que } \|f'\|_{\infty} \leq 2 \left(\|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty} \right)^{1/2}$$

(3)

FIN