

(TD) Séries Numériques
Les Classiques

Exo 1 / Transformation d'Abel

1) Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques réelles

$$\text{mq} \left[\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n \right]$$

on $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ D'où $a_k = S_k - S_{k+1} \quad \forall k \geq 1$
2) On suppose que

$\exists M > 0$ tq $|S_n| \leq M$ et que (b_n) est décroissante vers 0

Montrer alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ cvge

Exo 2 / Règle de Raabe - Duhamel

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle tq $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$
positive
on $\alpha > 1$ et $\beta > 1$

1) à l'aide d'un DL de $\ln(n^\alpha u_n)$ mq

i) $\alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n$ cvge

ii) $\alpha < 1 \Rightarrow \sum u_n$ div

2) Étudier la cvge des rangs $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$
puis discuter le cas $\alpha = 1$

(1)

Exo 3 / Formule de Stirling

1) Intégrales de Wallis (Admise cette qst)
on pose $w_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$

i) Mq (w_n) est décroissante

ii) Mq $\frac{w_{n+2}}{w_n} = \frac{n+2}{n+1}$

iii) En deduire que $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

iv) Mq $w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ et $w_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$

2) On pose $u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$

i) A l'aide d'un RL mq $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge

ii) En deduire que (u_n) converge $l > 0$

iii) on pose $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, Mq $l = \sqrt{2\pi}$

indice : utiliser la suite $\frac{u_{2n}}{u_n^2}$ et qst 1

iv) En deduire que
$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(2)

Exo 4 / Produit de Cauchy / et Applications

si (a_n) et (b_n) sont deux suites numériques
on pose $a_n * b_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

1) On pose $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

i) Dire pourquoi $\sum a_n$ sont semi-converge

ii) Mg $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n * b_n \neq 0$

iii) Que peut-on conclure

2) Mg pour tout $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^{(k)}$ converge Abs

ii) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^{(k)}$

3) Exo défi (Oral CCP) : $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, 1, \dots, n\}$

on pose $N(n, p) = \text{card} \{ \sigma \in S_n \text{ tq } \sigma \text{ admet exact } p \text{ pts fixes} \}$

$D(n) = N(n, 0)$: Nbr de derangements

1) Mg i) $N(n, p) = \binom{n}{p} D(n-p)$

ii) $\sum_{p=0}^n N(n, p) = n!$

2) pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$

i) Mg $f(x)$ est bien définie.

ii) Mg $f(x) e^x = \frac{1}{1-x}$ (3)

3) En deduire $N(n, p)$ en fait de n et p

4) En deduire un équivalent $\frac{N(n, p)}{n!}$ qd $n \rightarrow \infty$
puis interpreter (lemme des chapeaux) (3)