

Algèbre Linéaire : Déterminants

1. Cas d'une Matrice

📖 **Formule Leibniz** : $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$

📖 **Propriétés fondamentales** :

- 📖 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- 📖 $\det(A^k) = (\det A)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 📖 $\det(I_n) = 1$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

📖 **Diagonale-Triangulaire** : $\det = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

📖 **Transposée** : $\det(A^T) = \det(A)$

📖 **Comatrice** :
 $A \cdot (\text{Com}A)^T = (\text{Com}A)^T \cdot A = \det(A)I_n$

📖 **CNS d'inversibilité** :
 $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ dans ce cas
 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{Com}A)^T$

📖 **Matrices semblables** :
 $A = PBP^{-1} \implies \det(A) = \det(B)$

📖 **Opérations élémentaires** :

- 📖 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($i \neq j$) : même déterminant.
- 📖 $L_i \leftrightarrow L_j$: multiplier par -1.
- 📖 $L_i \leftarrow \lambda L_i$: multiplier par $\frac{1}{\lambda}$.
- 📖 Mêmes propriétés pour les colonnes C_i .

2. Cas d'un endomorphisme

📖 **Définition** : Soient E de dim finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . $\det(u) = \det(M_{\mathcal{B}}(u))$

📖 **Indépendance de la base** :
Si $\mathcal{B}'$ est une autre base, $M_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(u)P$,
donc $\det(M_{\mathcal{B}'}(u)) = \det(M_{\mathcal{B}}(u))$.

📖 **Formules** :

- 📖 $\det(v \circ u) = \det(v) \det(u)$
- 📖 $\det(u^k) = \det(u)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 📖 $\det(\text{id}_E) = 1$
- 📖 $u \in \text{Aut}(E) \iff \det(u) \neq 0$
Dans ce cas : $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$
- 📖 $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$

3. Cas d'une famille

📖 **Définition** :
Soit $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E ,
et $M = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.
On pose : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \det(M)$

📖 **Formes n -linéaires alternées** :
 $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée telle que
 $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
L'espace de ces formes est de dimension 1 (toutes proportionnelles à $\det_{\mathcal{B}}$).

📖 **Relations de changement de base** :
 $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}$

📖 **Caractérisation des bases** :
 $\mathcal{C}$ est une base de E
 $\iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$ dans toute base $\mathcal{B}$
 $\iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$ dans au moins une base $\mathcal{B}$.

📖 **Base directes vs. indirectes** :
Soit $\mathcal{B}_0$ une base de E , fixée. $\mathcal{B}$ une autre base de E .
 $\mathcal{B}$ est dite directe $\iff \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$.
Dans le cas contraire, elle est dite indirecte.

📖 **Image par un endomorphisme** :
 $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{C})) = \det(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$