

Algèbre Générale : Structure d'Algèbre

1. Définition et Premières Propriétés

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition : On appelle **$\mathbb{K}$ -algèbre** un triplé $(A, +, \cdot, \times)$ tel que :

☞ $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

☞ $(A, +, \times)$ est un anneau.

☞ La loi interne $\times$ est bilinéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in A^2$,

$$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$$

Vocabulaire :

☞ A est **associative** (resp. **commutative**, **unitaire**) si la loi $\times$ l'est. En MP, sauf mention contraire, une algèbre est associative et unitaire (élément neutre 1_A).

☞ Si $\dim_{\mathbb{K}}(A) = n < +\infty$, A est dite de dimension finie.

2. Exemples Usuels en CPGE

☞ **Polynômes :** $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre associative, commutative, unitaire et de dimension infinie.

☞ **Matrices :** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre associative, non commutative (si $n \geq 2$), unitaire (I_n), de dimension n^2 .

☞ **Endomorphismes :** $\mathcal{L}(E)$ (E ev) avec la composition $\circ$. Elle est non commutative si $\dim(E) \geq 2$, unitaire (id_E), de dimension $(\dim E)^2$.

☞ **Fonctions :** $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ pour le produit usuel des fonctions (associative, commutative, unitaire).

3. Sous-algèbres

Définition : Une partie $B \subset A$ est une **sous-algèbre** de A si :

1. B est un sous-espace vectoriel de A .
2. B est stable par produit : $\forall (x, y) \in B^2, x \times y \in B$.
3. $1_A \in B$ (si A est unitaire).

Sous-algèbre engendrée par un élément : Pour $x \in A$, $\mathbb{K}[x] = \{P(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est la plus petite sous-algèbre de A contenant x et 1_A . Elle est toujours commutative .

4. Morphismes d'Algèbres

Soient A et B deux $\mathbb{K}$ -algèbres unitaires.

Définition : $f : A \rightarrow B$ est un **morphisme d'algèbres** si :

1. f est une application linéaire.
2. $\forall (x, y) \in A^2, f(x \times_A y) = f(x) \times_B f(y)$.
3. $f(1_A) = 1_B$.

Propriétés :

🔍 $\ker(f)$ est un sev et un idéal de A (mais pas une sous-algèbre unitaire si $f \neq 0$).

🔍 $f(B)$ est une sous-algèbre de B .

🔍 **Morphisme d'évaluation :** Pour $a \in A$ fixé, $\phi_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow A, P \mapsto P(a)$ est un morphisme d'algèbres. $(\phi_a) = \mathbb{K}[a]$.