

Algèbre Générale : Anneaux, Corps & Idéaux

Partie 1 : Structure d'Anneau & Sous-anneaux

Définition : Un anneau $(A, +, \cdot)$ est un ensemble muni de deux lois associatives vérifiant :

- ☞ $(A, +)$ est un groupe abélien (neutre 0_A).
- ☞ $\cdot$ est distributive par rapport à $+$.
- ☞ $\cdot$ admet un élément neutre 1_A .

Dans toute la suite, A est commutatif et $1_A \neq 0_A$.

Éléments remarquables :

- ☞ **Inversible :** $x \in A^\times \iff \exists y \in A, xy = 1_A$.
- ☞ **Diviseur de zéro :** $x \neq 0_A$ tel que $\exists y \neq 0_A, xy = 0_A$.
- ☞ **Nilpotent :** $x \in A$ tel que $\exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0_A$.

Anneau intègre : Anneau commutatif unitaire sans diviseur de zéro non nul.

i.e. : $xy = 0_A \implies x = 0_A$ ou $y = 0_A$.

Sous-anneau : $B \subset A$ est un sous-anneau ssi :

- ☞ $1_A \in B$ et $\forall x, y \in B$, on a $x - y \in B$, $x \cdot y \in B$.

Morphisme d'anneaux : $f : A \rightarrow B$ vérifie :

- ☞ $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.
- ☞ $f(1_A) = 1_B$.

Noyau et Image : $\text{Im}(f)$ est un sous-anneau de B .
 $\text{Ker}(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$ s. anneau de A .

Partie 2 : Idéaux d'un Anneau Commutatif

Définition : Un sous-ensemble $I \subset A$ est un **idéal** de A ssi :

- ☞ $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
- ☞ $\forall a \in A, \forall x \in I, a \cdot x \in I$ (absorbant).

Propriétés des idéaux : Soit I, J idéaux de A

- ☞ $I = A \iff 1_A \in I \iff I \cap A^\times \neq \emptyset$.
- ☞ L'intersection qlq d'idéaux est un idéal.
- ☞ $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ est un idéal.
- ☞ $I \cdot X$ est un idéal de A pour toute partie $X \subset A$.

Idéaux vs. Morphismes : Soit $f : A \rightarrow B$ morphisme d'anneaux

- ☞ Si J idéal de B alors $f^{-1}(J)$ idéal de A .
- ☞ $\text{Ker}(f)$ est un idéal de A .
- ☞ Si f est surjective et I idéal de A , alors $f(I)$ idéal de B .

Idéal principal : Idéal engendré par un élément :
 $\langle a \rangle = aA = \{a \cdot x \mid x \in A\}$.

Anneau principal : Un anneau A est principal si tous ses idéaux sont principaux
 $\forall I$ idéal de $A, \exists a \in A, I = \langle a \rangle$.

Exemples fondamentaux : $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ (où K est un corps) sont des anneaux principaux.

Partie 3 : Idéaux Premiers et Maximaux

Idéal premier : $P \neq A$ idéal de A tel que :

$$\forall x, y \in A, \quad xy \in P \implies x \in P \text{ ou } y \in P$$

Caractérisation : P est premier $\iff A/P$ est intègre.

Idéal maximal : M idéal de A tel que les seuls idéaux contenant M sont M et A .

Caractérisation : M est maximal $\iff A/M$ est un corps.

Propriétés :

- ☞ Tout idéal maximal est premier (car tout corps est intègre).
- ☞ **Théorème de Krull :** Tout idéal $I \neq A$ est contenu dans un idéal maximal.

Partie 4 : Structure de Corps

Définition : Un corps K est un anneau commutatif unitaire non nul dans lequel tout élément non nul est inversible ($K^\times = K \setminus \{0_K\}$).

Propriétés des corps :

- ☞ Un corps K n'admet que $\{0_K\}$ et K comme idéaux.
- ☞ Tout morphisme d'anneaux de corps est soit nul soit injectif.
- ☞ Tout anneau intègre fini est un corps.