

Algèbre Générale : Structure d'Algèbre

1. Généralités

Dans toute la suite : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : On appelle **$\mathbb{K}$ -algèbre** tout triplé $(A, +, \cdot, *)$ tel que :

- ☞ $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(A, +, *)$ est un anneau.
- ☞ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in A^2$, on a : $\lambda \cdot (x * y) = (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y)$.
- ☞ $\forall x \in A$, on a : $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Définition : Une partie $B \subset A$ est une **sous-algèbre** de A si :

- ☞ $1_A \in B$.
- ☞ B est un sous-espace vectoriel de A .
- ☞ B est stable par produit : $\forall (x, y) \in B^2, x * y \in B$.

Propriété caractéristique : Une partie $B \subset A$ est une **sous-algèbre** de A ssi :

- ☞ $1_A \in B$.
- ☞ $\forall (x, y) \in B^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in B$ et $x * y \in B$.

Définition : Soient A et B deux $\mathbb{K}$ -algèbres.

$f : A \rightarrow B$ est dit un **morphisme d'algèbres** ssi :

- ☞ $f(1_A) = 1_B$.
- ☞ $\forall (x, y) \in B^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on :
 $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$ et $f(x * y) = f(x) * f(y)$.

Propriétés : Dans ce cas, on a :

$\ker(f)$ est un sev et un idéal de A et $\text{Im}(f)$ est une sous-algèbre de B .

Éléments nilpotents : x est nilpotent dans A , i.e. $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p = 0$,

alors $1_A - x$ est inversible, avec $(1_A - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} x^k$.

2. Sous-algèbre engendrée par un élément vs. Polynôme minimal

Notations : Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre et $a \in A$.

☞ Pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on pose $P(a) = \sum_{k=0}^n a_k a^k \in A$, avec $a^0 = 1_A$.

☞ $\mathbb{K}[a] = \{P(a), \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Propriétés :

- ☞ Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$ et $(P \cdot Q)(a) = P(a) * Q(a)$.
- ☞ $\mathbb{K}[a]$ est la plus petite sous-algèbre de A contenant a , appelée sous-algèbre de A engendrée par a .
- ☞ $\mathbb{K}[a]$ est commutative : tous les polynômes en a commutent entre eux.

Vocabulaire et Propriétés :

- ☞ $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **polynôme annulateur** de $a \in A \Leftrightarrow P(a) = 0$.
- ☞ $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X], \text{ tel que } P(a) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
- ☞ Si il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, tel que $P(a) = 0_A$, alors I_x est engendré par un unique polynôme unitaire (non cte), noté π_a et appelé **polynôme minimal** de a .
- ☞ Dans cas π_a divise tous les $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(a) = 0$.
- ☞ En dimension fini, π_a existe toujours.

Théorème Fondamental : Soit $a \in A$. Au cas où π_a existe, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

- ☞ $(1_A, a, \dots, a^k)$ liée $\Leftrightarrow \deg(\pi_a) \leq k$.
 $(1_A, a, \dots, a^k)$ libre $\Leftrightarrow \deg(\pi_a) > k$.
- ☞ $\dim \mathbb{K}[a] = \deg(\pi_a)$. Plus précisément : $\mathbb{K}[a] = \text{Vect}(1_A, a, \dots, a^k)$, où $k = \deg(\pi_a)$.