

Algèbre Linéaires : Polynômes

1. Construction des Polynômes

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition algébrique : Un polynôme à une indéterminée X est une suite à supports finis d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

Structure d'Algèbre :

☞ Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. On pose :

$$☞ P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$$

$$☞ P \times Q = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

☞ $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative et intègre.

2. Degré et Coefficient Dominant

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Notions fondamentales :

☞ **Degré :** $\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

☞ Par convention, $\deg(0) = -\infty$.

☞ **Coefficient dominant :** $cd(P) = a_{\deg(P)}$.

☞ P est dit **unitaire** si $cd(P) = 1$.

Formules fondamentales du degré :

☞ $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.

☞ Si $\deg P < \deg Q$, alors : $\deg(P + Q) = \deg Q$ et $cd(P + Q) = cd(Q)$.

☞ $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

☞ $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ (si $\deg Q \geq 1$).

☞ $cd(P \times Q) = cd(P) \times cd(Q)$.

3. Polynômes de Degrés Échelonnés

Définition :

Une famille de polynômes non nuls $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est dite à degrés échelonnés si :

$$\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$$

Théorème fondamental :

☞ Toute famille à degrés échelonnés de $\mathbb{K}[X]$ est libre.

☞ Si de plus $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, alors $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Formule de Taylor : Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a).$$

4. Polynômes d'Interpolation de Lagrange

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des points deux à deux distincts.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$

Propriétés :

☞ $\deg L_k = n - 1$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

☞ $L_k(a_i) = \delta_{k,i}$ (symbole de Kronecker).

☞ $(L_1, \dots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

☞ Expression explicite du polynôme d'interpolation :

$$P(X) = \sum_{k=1}^n P(a_k) L_k(X).$$