

Algèbre Linéaire : EV & App. Linéaires

1. Espaces et Sous-Espaces Vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ sev de E ssi :

- ☞ $F \neq \emptyset$ (en général $0_E \in F$).
- ☞ $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$.

Intersection et Somme :

- ☞ L'intersection quelconque de sev est un sev.
- ☞ La somme $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$ est le plus petit sev contenant F et G .
- ☞ La somme $F + G$ est directe ($F \oplus G$) ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Sous-espaces supplémentaires : F et G sont supplémentaires dans $E \Leftrightarrow E = F \oplus G \Leftrightarrow$ tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

2. Familles de Vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- ☞ **$\mathcal{F}$ famille génératrice :** $\mathcal{F}$ engendre E
 $\Leftrightarrow E = \text{Vect}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow$ tout vecteur de E est combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{F}$.
- ☞ **$\mathcal{F}$ famille libre :** Pour toute sous-famille finie $(x_i)_{i \in J}$, on a $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in J, \lambda_i = 0$
- ☞ **$\mathcal{F}$ base :** Elle est libre et génératrice. Tout vecteur s'y décompose de façon unique.

3. Dimension Finie

E est de dimension finie ssi E admet au moins une famille génératrice finie.

Dans ce cas, on a :

Théorème de la base incomplète : De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base. Toute famille libre peut être complétée en une base de E .

Dimension : Toutes les bases de E ont le même cardinal, noté $\dim(E)$.

- ☞ Si $\dim(E) = n$, toute famille libre ou génératrice à n éléments est une base.
- ☞ Si F est un sev de E , alors $\dim(F) \leq \dim(E)$, avec égalité ssi $F = E$.

Formules À Apprendre : Si F et G deux sev de E , alors :

- ☞ $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
- ☞ $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- ☞ $E = F \oplus G$
 $\iff E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
- ☞ $\dim F \times G = \dim F + \dim G$.

4. Applications Linéaires

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Noyau : $\ker(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$ est un sev de E .

Noyau : $\text{Im}(u) = \{u(x) \mid x \in E\}$ est un sev de F .

Injectivité, Surjectivité, Bijectivité :

- ☞ u est injective $\iff \ker(u) = \{0_E\}$.
- ☞ u est surjective $\iff \text{Im}(u) = F$.
- ☞ Si $\mathcal{B}$ est une base de E , u est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Rang d'une application linéaire

Soient E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition : $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$.

Formule du Rang : $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u)$

Caractérisation des Isomorphismes : Si $\dim(E) = \dim(F) < +\infty$, alors
 u est un isomorphisme $\Leftrightarrow u$ est injective $\Leftrightarrow u$ est surjective.

Dualité

Forme linéaire : Une application $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Hyperplan : Sev H de E tel que $\exists x_0 \notin H \mid E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

- ☞ En dim finie n : H hyperplan de $E \Leftrightarrow \dim(H) = \dim E - 1$.
- ☞ H est un hyperplan ssi $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle, telle que $H = \ker(\varphi)$.