

Algèbre Linéaire : Matrices

1. Matrice en tant qu'app. linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représentant $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

- ☞ **Théorème du rang** : $p = \dim \ker A + \text{rg}(A)$
- ☞ **Injectivité** : A injective $\iff \ker A = \{0\}$
 $\iff \text{rg}(A) = p$ (nbr colonnes)
- ☞ **Surjectivité** :
 A surjective $\iff \text{rg}(A) = n$ (nbr lignes)
- ☞ **Image et colonnes** : $\text{Im}(A) = \text{Vect}(\text{colonnes de } A)$
 $\text{rg}(A) = \text{rg}(\text{colonnes de } A)$
 A est injective $\iff$ les colonnes de A forment une famille libre.
- ☞ **Matrices équivalentes** :
 $\text{rg}(A) = r \iff \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K}), A = PJ_rQ$
 $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) \iff A$ et B sont équivalentes/
- ☞ **Transposé et rang** :
 $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$
 $\text{rg}(A) = \text{rg}(\text{lignes de } A)$
 A est surjective $\iff$ les lignes de A forment une famille libre.

2. Matrice d'une app. linéaire

Soient E, F de dim finie, $\mathcal{B}$ base de E , $\mathcal{B}'$ base de F , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

☞ **Matrice représentative** : $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

☞ **Isomorphisme d'espaces** :

$$\mathcal{L}(E, F) \simeq \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad u \mapsto M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

☞ **Compatibilité avec la composition** :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(v) M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

☞ **Équation linéaire vs. Équation Matricielle** :

$$u(x) = y \iff M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)X = Y$$

☞ **Endomorphismes** :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) \text{ et } M_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_n.$$

☞ **Isomorphismes** :

u isomorphisme $\iff M_{\mathcal{B}}(u)$ est inversible, dans ce cas : $M_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(u)^{-1}$.

☞ **Puissances et polynômes** :

$$M_{\mathcal{B}}(u^k) = (M_{\mathcal{B}}(u))^k, \quad M_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(M_{\mathcal{B}}(u))$$

u et $M_{\mathcal{B}}(u)$ ont les mêmes polynômes annulateurs et le même polynôme minimal.

3. Matrice de passage

☞ **Définition** : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Son inverse est $(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.

☞ **Changement de coordonnées** : $X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X'$.

☞ **Formules de changement de bases** :

– Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$$

– Pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(u) P \quad \text{avec } P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

☞ Deux matrices sont équivalentes $\iff$ elles représentent la même application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans deux bases différentes.

☞ Deux matrices sont semblables $\iff$ elles représentent le même endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dans deux bases différentes.