

Contrôle : Algèbre Générale

Structure d'Idéal

Samedi 17 Octobre 2026 (Durée : 2 heures)

Dans tout ce devoir :

☞ $(A, +, \cdot)$ anneau commutatif non réduit à 0_A .

☞ $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de A .

☞ $\mathcal{I} + \mathcal{J} = \{x = a + b \text{ tel que } x \in \mathcal{I}, y \in \mathcal{J}\}$.

☞ $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = \{x = \sum_{\text{finie}} a_k \cdot b_k \text{ tel que } a_k \in \mathcal{I}, b_k \in \mathcal{J}\}$

☞ Un idéal $\mathcal{I} \neq A$ est dit **premier** quand il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in A^2 : x \cdot y \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in \mathcal{I} \text{ ou bien } y \in \mathcal{I}$$

☞ Pour tout $a \in A \setminus \{0_A\}$, on pose $\text{Ann}(a) = \{x \in A \text{ tel que } a \cdot x = 0_A\}$.

☞ Pour tout $a \in A$, on pose $\langle a \rangle = \{y = a \cdot x \text{ tel que } x \in A\}$.

☞ L'anneau A est dit **Noethérien** si et seulement si toute suite croissante (au sens de l'inclusion) d'idéaux $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ est stationnaire (i.e : il existe un rang N à partir duquel tous les idéaux sont égaux : $\forall n \geq N, \mathcal{I}_n = \mathcal{I}_N$).

☞ **L'ensemble des diviseurs de zéro :**

On pose : $\mathcal{D}(A) = \{x \in A \mid \exists y \in A \setminus \{0_A\}, x \cdot y = 0_A\}$.

① Montrer que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est un idéal de A .

② Donner un exemple où $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ n'est pas un idéal de A .

③ Montrer que $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est un idéal de $A \Leftrightarrow \mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ ou bien $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$.

④ Montrer que $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ est un idéal de A .

⑤ Montrer que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ est un idéal de A .

⑥ Justifier que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

⑦ Montrer que pour $a \in A \setminus \{0_A\}$, on a $\text{Ann}(a)$ est un idéal de A .

⑧ Justifier à l'aide d'un exemple que $\mathcal{D}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ n'est pas un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

⑨ **Exemples d'idéaux premiers.**

a Montrer que dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$, pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$ tel que $a \neq \pm 1$ on a : $\langle a \rangle$ est un idéal premier $\Leftrightarrow a$ est un nombre premier.

b Montrer que dans $(\mathbb{R}[X], +, \times)$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, non constant, on a : $\langle P \rangle$ est un idéal premier $\Leftrightarrow P$ est un polynôme irréductible.

c Montrer que dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$, on a :

i Si $k \in \mathbb{Z}$ et $d = \text{pgcd}(k, n)$, alors $\langle \bar{k} \rangle = \langle \bar{d} \rangle$

ii Pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, on a : $\langle \bar{k} \rangle$ est un idéal premier $\Leftrightarrow k$ est un diviseur premier de n .

⑩ On suppose dans cette question que $A \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $a^2 = a$.
On pose alors : $\mathcal{I} = \text{Ann}(a)$ et $\mathcal{J} = \langle a \rangle$.

a Vérifier que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \{0_A\}$ et que $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$.

b En déduire que pour tout autre idéal $\mathcal{K}$ de A , on a : $(\mathcal{K} \cap \mathcal{I}) + (\mathcal{K} \cap \mathcal{J}) = \mathcal{K}$.

⑪ Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de A . Montrer rigoureusement la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A^n, \text{ on a : } \prod_{i=1}^n x_i \in \mathcal{I} \Rightarrow \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } x_i \in \mathcal{I}$$

- 12** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. Soit $(\mathcal{I}_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'idéaux de A tous premiers. Soit $\mathcal{I}$ un autre idéal de A .
On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : \mathcal{I} \subset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k \Rightarrow \exists k \in [1, n] \text{ tel que } \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_k$$

- a** Établir que $\mathcal{P}_2$ est vraie.
- b** On suppose dans la suite que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie et que $\mathcal{P}_n$ n'est pas vraie.
- i** Justifier que $\forall j \in [1, n]$ on a $\mathcal{I} \not\subset \bigcup_{k \neq j} \mathcal{I}_k$.
- ii** En déduire que $\forall j \in [1, n]$, $\exists x_j \in \mathcal{I}$ tel que $x_j \notin \mathcal{I}_k$, pour tout $k \neq j$.
On pose $z = x_n + x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$.
- iii** Justifier que $z \in \mathcal{I}$.
- iv** Montrer que $z \notin \mathcal{I}_n$.
- v** Montrer aussi que $z \notin \mathcal{I}_k$, pour tout $k \in [1, n-1]$.
- vi** En déduire une contradiction, puis conclure.

- 13** En déduire les résultats suivants :

- a** **Théorème des évitements des idéaux** : Si un idéal $\mathcal{I}$ de A n'est contenu dans aucun des idéaux premiers $(\mathcal{I}_k)_{1 \leq k \leq n}$, alors il existe un élément $x \in \mathcal{I}$ qui n'appartient à aucun des $\mathcal{I}_k$.
- b** Si $(\mathcal{I}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille d'idéaux de A tous premiers tel que $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k$ est aussi un idéal, alors $\exists k \in [1, n]$ tel que $\mathcal{I}_j \subset \mathcal{I}_k$, pour tout $j \in [1, n]$.

- 14** On suppose dans cette question que A est principal.
On considère une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'idéaux de A : $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- a** Montrer que $\mathcal{I} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{I}_k$ est un idéal de A .
- b** En déduire que $\exists x \in A$ tel que $\mathcal{I} = \langle x \rangle$.
- c** Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathcal{I}_N$.
- d** En déduire que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_N$.
- e** Conclure que $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_N$ pour tout $n \geq N$.
- f** Quel résultat a-t-on démontré.

- 15** Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $\text{Ann}(a)$ est maximal pour l'inclusion parmi les $\text{Ann}(x)$. Autrement dit $\forall x \in A \setminus \{0_A\}$, on a $\text{Ann}(a) \subset \text{Ann}(x) \Rightarrow \text{Ann}(a) = \text{Ann}(x)$

- a** Montrer que $\text{Ann}(x.a) = \text{Ann}(a)$, pour tout $x \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $x.a \neq 0$.
- b** En déduire que si $x.y \in \text{Ann}(a)$ et si $x \notin \text{Ann}(a)$, alors $y \in \text{Ann}(a)$.
- c** En déduire que $\text{Ann}(a)$ est un idéal premier dans A .

- 16** On suppose dans cette question que A admet une famille finie d'idéaux maximaux de la forme $(\mathcal{I}_k = \text{Ann}(x_k))_{1 \leq k \leq n}$.

- a** Montrer que $\mathcal{D}(A) = \bigcup_{k=1}^n \text{Ann}(x_k)$.
- b** En déduire dans ce cas une CNS pour que $\mathcal{D}(A)$ soit un idéal de A .
- c** Donner un exemple d'anneau où cette condition est réalisée.

Fin

Bonne Chance

Corrigé

① Montrons que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est un idéal de A

✎ Élément neutre :

Puisque $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont des idéaux de A , ils contiennent tous deux le neutre additif 0_A . Ainsi, $0_A \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, ce qui prouve que l'intersection n'est pas vide.

✎ Stabilité par addition : Soient $x, y \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Alors $x, y \in \mathcal{I}$ et $x, y \in \mathcal{J}$.

✎ Puisque $\mathcal{I}$ est un idéal et que $x, y \in \mathcal{I}$, on a $x - y \in \mathcal{I}$.

✎ De même, puisque $\mathcal{J}$ est un idéal et que $x, y \in \mathcal{J}$, on a $x - y \in \mathcal{J}$.

Par conséquent, $x - y \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

✎ Absorption par multiplication externe : Soit $a \in A$ et soit $x \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Alors $x \in \mathcal{I}$ et $x \in \mathcal{J}$.

✎ Puisque $\mathcal{I}$ est un idéal, $a \cdot x \in \mathcal{I}$.

✎ Puisque $\mathcal{J}$ est un idéal, $a \cdot x \in \mathcal{J}$.

Ainsi, $a \cdot x \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

L'intersection $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est donc bien un idéal de A .

② Exemple où $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ n'est pas un idéal de A

Considérons l'anneau des entiers $A = \mathbb{Z}$ et choisissons deux idéaux principaux :

$$\mathcal{I} = 2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathcal{J} = 3\mathbb{Z}$$

* L'élément 2 appartient à $\mathcal{I}$, donc $2 \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

L'élément 3 appartient à $\mathcal{J}$, donc $3 \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

Si la réunion $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ était un idéal, elle serait stable par addition. Or, la somme de ces deux éléments vaut : $2 + 3 = 5$ * Est-ce que 5 est dans $2\mathbb{Z}$? Non.

Est-ce que 5 est dans $3\mathbb{Z}$? Non. Par conséquent, $5 \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

La réunion $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ n'est donc pas stable par addition, ce qui prouve qu'elle n'est pas un idéal de A .

③ Montrons que $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est un idéal de $A \iff \mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ ou bien $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$

✎ **Sens indirect ($\Leftarrow$) :** Supposons que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ (le cas $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ étant symétrique). Alors la réunion $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est égale à $\mathcal{J}$. Puisque $\mathcal{J}$ est un idéal de A , la réunion $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est par conséquent un idéal de A .

✎ **Sens direct ($\Rightarrow$) (par l'absurde) :** Supposons que $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ soit un idéal de A , et supposons par l'absurde que l'on n'ait ni $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ ni $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$.

✎ Il existe donc un élément $x \in \mathcal{I}$ tel que $x \notin \mathcal{J}$.

✎ Il existe également un élément $y \in \mathcal{J}$ tel que $y \notin \mathcal{I}$.

Considérons la somme de ces deux éléments : $x + y$. Puisque $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est supposé être un idéal, il est stable par addition, donc $x + y \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. Cela signifie que $(x + y \in \mathcal{I})$ ou $(x + y \in \mathcal{J})$:

✎ **Premier cas ($x + y \in \mathcal{I}$) :** Comme $x \in \mathcal{I}$, par stabilité par soustraction/addition dans l'idéal $\mathcal{I}$, on a :

$$y = (x + y) - x \in \mathcal{I}$$

C'est en contradiction directe avec le fait que $y \notin \mathcal{I}$.

✎ **Second cas ($x + y \in \mathcal{J}$) :** Comme $y \in \mathcal{J}$, on a de même :

$$x = (x + y) - y \in \mathcal{J}$$

C'est en contradiction directe avec le fait que $x \notin \mathcal{J}$.

Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. L'hypothèse de négation est donc fausse, d'où $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ ou $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$.

④ Montrons que $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ est un idéal de A

Par définition, la somme de deux idéaux est l'ensemble :

$$\mathcal{I} + \mathcal{J} = \{x + y \mid x \in \mathcal{I}, y \in \mathcal{J}\}$$

✎ **Élément neutre :** Puisque $0_A \in \mathcal{I}$ et $0_A \in \mathcal{J}$, on a $0_A = 0_A + 0_A \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$. L'ensemble n'est pas vide.

☞ **Stabilité par addition** : Soient $u, v \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$. Par définition, il existe $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ et $y_1, y_2 \in \mathcal{J}$ tels que $u = x_1 + y_1$ et $v = x_2 + y_2$. Calculons leur somme :

$$u - v = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$$

Par associativité et commutativité. Puisque $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont des idéaux, ils sont stables par addition, donc $x_1 - x_2 \in \mathcal{I}$ et $y_1 - y_2 \in \mathcal{J}$. Ainsi, $u - v$ s'écrit bien comme la somme d'un élément de $\mathcal{I}$ et d'un élément de $\mathcal{J}$, donc $u - v \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$.

☞ **Absorption par multiplication externe** : Soit $a \in A$ et soit $u = x + y \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$ (avec $x \in \mathcal{I}$ et $y \in \mathcal{J}$). Multiplions par a en utilisant la distributivité :

$$a \cdot u = a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

Puisque $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont des idéaux, on a $a \cdot x \in \mathcal{I}$ et $a \cdot y \in \mathcal{J}$. Par conséquent, $a \cdot u \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$.

L'ensemble $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ est donc bien un idéal de A .

⑤ Montrons que $\mathcal{IJ}$ est un idéal de A

Par définition, l'idéal produit $\mathcal{IJ}$ est l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme $x_k y_k$ avec $x_k \in \mathcal{I}$ et $y_k \in \mathcal{J}$:

$$\mathcal{IJ} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k y_k \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall k, x_k \in \mathcal{I}, y_k \in \mathcal{J} \right\}$$

☞ **Élément Neutre** : On a $0_A = 0_A \cdot 0_A$. Comme $0_A \in \mathcal{I}$ et $0_A \in \mathcal{J}$, on a $0_A \in \mathcal{IJ}$.

☞ **Stabilité par addition** : Soient $u, v \in \mathcal{IJ}$. Alors $u = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ et $v = \sum_{j=1}^m x'_j y'_j$.

Leur somme $u + v$ s'écrit comme une grande somme finie regroupant les termes de u et de v :

$$u + v = \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{j=1}^m x'_j y'_j$$

Chaque terme de cette somme reste de la forme « un élément de $\mathcal{I}$ multiplié par un élément de $\mathcal{J}$ ». Donc $u + v \in \mathcal{IJ}$.

☞ **Absorption par multiplication externe** : Soit $a \in A$ et soit $u = \sum_{k=1}^n x_k y_k \in \mathcal{IJ}$. Par distributivité dans l'anneau A :

$$a \cdot u = a \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) = \sum_{k=1}^n (a \cdot x_k) y_k$$

Puisque $\mathcal{I}$ est un idéal, pour tout k , on a $a \cdot x_k \in \mathcal{I}$. Ainsi, chaque terme $(a \cdot x_k) y_k$ est le produit d'un élément de $\mathcal{I}$ et d'un élément de $\mathcal{J}$. Par conséquent, $a \cdot u \in \mathcal{IJ}$.

L'ensemble $\mathcal{IJ}$ est donc bien un idéal de A .

⑥ Justifions que $\mathcal{IJ} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$

Soit $u \in \mathcal{IJ}$. Par définition, u est de la forme $u = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ avec $x_k \in \mathcal{I}$ et $y_k \in \mathcal{J}$ pour tout k .

☞ Puisque $\mathcal{J}$ est un idéal, chaque $y_k \in \mathcal{J}$, donc par absorption externe, $x_k y_k \in \mathcal{J}$ pour tout k .

☞ Par suite, la somme finie $u = \sum_{k=1}^n (x_k y_k)$ est une somme d'éléments de $\mathcal{J}$. Comme $\mathcal{J}$ est un idéal, il est stable par addition, donc $u \in \mathcal{J}$.

☞ De même, en inversant les rôles, puisque $\mathcal{I}$ est un idéal, $x_k \in \mathcal{I}$ implique que $x_k y_k \in \mathcal{I}$, et par stabilité par addition, $u \in \mathcal{I}$.

On a donc à la fois $u \in \mathcal{I}$ et $u \in \mathcal{J}$, ce qui signifie que $u \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Ainsi, $\mathcal{IJ} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

⑦ Montrons que pour $a \in A \setminus \{0_A\}$, on a $\text{Ann}(a)$ est un idéal de A

☞ **Élément Neutre** : $0_A \cdot a = 0_A$, donc $0_A \in \text{Ann}(a)$.

☞ **Stabilité par addition** : Soient $x, y \in \text{Ann}(a)$. Alors $x \cdot a = 0_A$ et $y \cdot a = 0_A$. Calculons $(x + y) \cdot a$ par distributivité :

$$(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a = 0_A + 0_A = 0_A$$

Donc $x + y \in \text{Ann}(a)$.

☞ **Absorption par multiplication externe** : Soit $\lambda \in A$ et soit $x \in \text{Ann}(a)$ (donc $x \cdot a = 0_A$). Calculons $(\lambda \cdot x) \cdot a$ par associativité et commutativité :

$$(\lambda \cdot x) \cdot a = \lambda \cdot (x \cdot a) = \lambda \cdot 0_A = 0_A$$

Donc $\lambda \cdot x \in \text{Ann}(a)$.

$\text{Ann}(a)$ est donc bien un idéal de A .

⑧ Montrons que $\mathcal{D}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ est un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

En effet : Dans cet $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'élément $x = (1, 0)$ est un diviseur de zéro car il annule $y = (0, 1)$ (et $y \neq 0$). Donc $x \in \mathcal{D}(A)$.

L'élément $x' = (0, 1)$ est aussi un diviseur de zéro car il annule $y' = (1, 0)$. Donc $x' \in \mathcal{D}(A)$.

Pourtant, leur somme $x + x' = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'est pas un diviseur de zéro, car le seul élément qui annule $(1, 1)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est $(0, 0)$.

⑨ Exemples d'idéaux premiers

a  Sens $(\Leftarrow)$: Si $a = p$ est un nombre premier, montrons que $\langle p \rangle$ est premier.

En effet : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que leur produit $xy \in \langle p \rangle$. Cela signifie que p divise le produit xy . D'après le lemme de Gauss, comme p est premier, si p divise xy , alors p divise x ou p divise y . Par conséquent, $x \in \langle p \rangle$ ou $y \in \langle p \rangle$, ce qui prouve que $\langle p \rangle$ est un idéal premier.

 Sens $(\Rightarrow)$: Supposons que $\langle a \rangle$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$ et $a \neq \pm 1$. Si a n'était pas premier, il serait décomposable sous la forme $a = b \cdot c$ avec $b, c \notin \{-1, 1\}$. Le produit $bc = a \in \langle a \rangle$, donc par définition de l'idéal premier, l'un des facteurs, disons b , appartiendrait à $\langle a \rangle$. Cela signifierait que a divise b , ce qui est impossible en valeur absolue puisque b est un facteur strict de a .

b  Sens $(\Leftarrow)$: Supposons P irréductible.

Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que le produit $AB \in \langle P \rangle$. Cela signifie que P divise le produit AB , noté $P \mid AB$. D'après le **lemme d'Euclide** (ou de Gauss) :

$$P \mid AB \implies (P \mid A \text{ ou } P \mid B)$$

En termes d'idéaux, cela se traduit par :

$$AB \in \langle P \rangle \implies (A \in \langle P \rangle \text{ ou } B \in \langle P \rangle)$$

Par conséquent, l'idéal $\langle P \rangle$ est un idéal premier.

 Sens $(\Rightarrow)$: Supposons que $\langle P \rangle$ soit un idéal premier (avec P non constant).

Montrons que P est nécessairement irréductible.

Supposons que P se décompose sous la forme d'un produit $P = Q \cdot R$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$. Puisque $P = Q \cdot R$, on a évidemment $P \in \langle P \rangle$, ce qui implique que le produit $Q \cdot R \in \langle P \rangle$. Puisque l'idéal $\langle P \rangle$ est premier, cela entraîne que :

$$Q \in \langle P \rangle \quad \text{ou} \quad R \in \langle P \rangle$$

Si $Q \in \langle P \rangle$, alors P divise Q . Comme on a déjà Q qui divise P (car $P = QR$), P et Q sont associés, ce qui signifie que R est un polynôme constant non nul. Si $R \in \langle P \rangle$, par un raisonnement symétrique, Q est un polynôme constant non nul.

Ainsi, toute décomposition de P en produit de deux facteurs implique qu'un des facteurs est constant non nul. Le polynôme P est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

c .

i  Première inclusion : $\langle \bar{k} \rangle \subset \langle \bar{d} \rangle$

Par définition, $d = \text{pgcd}(k, n)$, donc d divise k . Cela signifie qu'il existe un entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = q \cdot d$. En passant aux classes dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on en déduit que $\bar{k} = \bar{q} \cdot \bar{d}$. Par conséquent, la classe $\bar{k}$ est un multiple de $\bar{d}$, ce qui implique que l'élément $\langle \bar{k} \rangle \subset \langle \bar{d} \rangle$.

 Seconde inclusion : $\langle \bar{d} \rangle \subset \langle \bar{k} \rangle$

D'après le théorème de Bézout, comme $d = \text{pgcd}(k, n)$, il existe des coefficients de Bézout $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que : $d = u \cdot k + v \cdot n$.

En passant aux classes dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et en sachant que $\bar{n} = \bar{0}$, on obtient : $\bar{d} = \overline{u \cdot k + v \cdot n} = \bar{u} \cdot \bar{k} + \bar{v} \cdot \bar{n} = \bar{u} \cdot \bar{k} + \bar{0} = \bar{u} \cdot \bar{k}$. Ainsi, la classe $\bar{d}$ est un multiple de $\bar{k}$, ce qui signifie que : $\langle \bar{d} \rangle \subset \langle \bar{k} \rangle$.

 Conclusion : Par double inclusion, on a bien l'égalité : $\langle \bar{k} \rangle = \langle \bar{d} \rangle$

ii  Sens $(\Rightarrow)$: Montrons que si $\langle \bar{k} \rangle$ est premier, alors k un diviseur premier de n .

Supposons que l'idéal $\langle \bar{k} \rangle$ soit premier.

D'après la question précédente, comme $\langle \bar{k} \rangle = \langle \bar{d} \rangle$ où $d = k \wedge n$ divise n , on peut supposer k divise n , quitte à remplacer $\bar{k}$ par $\bar{d}$ puisqu'ils engendrent le même idéal.

Supposons que k ne soit pas un nombre premier. Il existe alors deux entiers strictement inférieurs à k tels que $k = a \cdot b$. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, cela se traduit par :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} = \bar{k} \in \langle \bar{k} \rangle$$

Puisque l'idéal $\langle \bar{k} \rangle$ est premier, le produit $\bar{a}\bar{b} \in \langle \bar{k} \rangle$ implique que :

$$\bar{a} \in \langle \bar{k} \rangle \quad \text{ou} \quad \bar{b} \in \langle \bar{k} \rangle$$

Cela signifierait que $\bar{a} = \bar{k}q$ ou que $\bar{b} = \bar{k}q$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ce qui veut dire n divise $a - kq$ ou que n divise $b - kq$. Or k divise n , donc k divise $a - kq$

ou que k divise $b - kq$, donc n divise a ou que n divise b . Ce qui est impossible puisque $1 < a < k$ et $1 < b < k$.

Par conséquent, k est nécessairement un nombre premier.

☞ Sens ($\Leftarrow$) : **Montrons que si k est un diviseur premier de n , alors $\langle \bar{k} \rangle$ est premier.**

En effet : Soient $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que leur produit appartienne à l'idéal $\langle \bar{k} \rangle$, cela signifie que $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{x} \cdot \bar{y} = \alpha \bar{k} = \alpha k$, autrement dit n divise $xy - \alpha k$. Or k divise n , donc k divise $xy - \alpha k$, donc k divise xy (puisque k divise αk).

Puisque k est un nombre premier, le **lemme de Gauss** s'applique : si k divise le produit xy , alors k divise x ou k divise y . Par conséquent :

$$\bar{x} \in \langle \bar{k} \rangle \quad \text{ou} \quad \bar{y} \in \langle \bar{k} \rangle$$

L'idéal $\langle \bar{k} \rangle$ vérifie donc bien la propriété d'un idéal premier.

☞ **Conclusion** : L'idéal $\langle \bar{k} \rangle$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si k est un diviseur premier de n .

10 Anneau avec $a^2 = a$, $\mathcal{I} = \text{Ann}(a)$ et $\mathcal{J} = \langle a \rangle$

a Vérifions que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \{0_A\}$ et $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$:

☞ *Intersection* : Soit $x \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. Comme $x \in \mathcal{J} = \langle a \rangle$, il existe $b \in A$ tel que $x = b \cdot a$. De plus, comme $x \in \mathcal{I} = \text{Ann}(a)$, on a $x \cdot a = 0_A$. En remplaçant : $(b \cdot a) \cdot a = b \cdot a^2 = b \cdot a = x = 0_A$. Donc $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \{0_A\}$.

☞ *Somme* : Soit $x \in A$. On peut écrire :

$$x = (x - x \cdot a) + (x \cdot a)$$

Posons $u = x - x \cdot a$ et $v = x \cdot a$. Vérifions que $u \in \text{Ann}(a)$: $u \cdot a = (x - x \cdot a) \cdot a = x \cdot a - x \cdot a^2 = x \cdot a - x \cdot a = 0_A$, donc $u \in \mathcal{I}$. Il est clair que $v \in \langle a \rangle = \mathcal{J}$. Ainsi, $x = u + v \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$, ce qui prouve que $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$.

b Déduisons que pour tout idéal $\mathcal{K}$ de A , on a $(\mathcal{K} \cap \mathcal{I}) + (\mathcal{K} \cap \mathcal{J}) = \mathcal{K}$:

☞ L'inclusion $(\mathcal{K} \cap \mathcal{I}) + (\mathcal{K} \cap \mathcal{J}) \subset \mathcal{K}$ est vraie car $(\mathcal{K} \cap \mathcal{I}) \subset \mathcal{K}$, $(\mathcal{K} \cap \mathcal{J}) \subset \mathcal{K}$ et car $\mathcal{K}$ est stable par addition.

☞ Pour l'inclusion réciproque, soit $x \in \mathcal{K}$. Comme $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathcal{I}$ et $v \in \mathcal{J}$. Puisque $u = x - v$, et que $x \in \mathcal{K}$ et $v \in \mathcal{J} \subset \mathcal{K}$, on a $u \in \mathcal{K}$. Ainsi $u \in \mathcal{K} \cap \mathcal{I}$. De même, $v = x - u \in \mathcal{K} \cap \mathcal{J}$. Donc $x \in (\mathcal{K} \cap \mathcal{I}) + (\mathcal{K} \cap \mathcal{J})$, d'où l'égalité voulue.

11 Propriété fondamentale d'un idéal premier

Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de A . Démontrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A^n, \left(\prod_{i=1}^n x_i \in \mathcal{I} \right) \implies (\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathcal{I})$$

- **Initialisation** ($n = 1$) : Si $\prod_{i=1}^1 x_i = x_1 \in \mathcal{I}$, l'indice $i = 1$ convient directement.
- **Hérédité** : Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geq 1$. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in A^{n+1}$ tel que :

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \cdot x_{n+1} \in \mathcal{I}$$

Notons $X = \prod_{i=1}^n x_i$. Le produit devient $X \cdot x_{n+1} \in \mathcal{I}$. Puisque $\mathcal{I}$ est premier, cela implique que :

- Soit $x_{n+1} \in \mathcal{I}$ (auquel cas la propriété est vérifiée pour $i = n + 1$).
- Soit $X = \prod_{i=1}^n x_i \in \mathcal{I}$. Par hypothèse de récurrence appliquée à ce produit de n termes, il existe un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_i \in \mathcal{I}$.

La propriété est donc démontrée par récurrence pour tout $n \geq 1$.

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. Soit $(\mathcal{I}_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'idéaux de A tous **premiers**. Soit $\mathcal{I}$ un autre idéal de A .

On souhaite démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n : \mathcal{I} \subset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k \implies \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_k$$

a **Initialisation pour $n = 2$ ($\mathcal{P}_2$)** :

Supposons que $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. Montrons que $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_1$ ou $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_2$. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{I}_2$. Il existe alors des éléments $x_1 \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_1$ et $x_2 \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_2$. Considérons l'élément $x_1 + x_2$. Comme $\mathcal{I}$ est un idéal et que $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, on a $x_1 + x_2 \in \mathcal{I}$. Puisque $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, on a nécessairement :

$$x_1 + x_2 \in \mathcal{I}_1 \quad \text{ou} \quad x_1 + x_2 \in \mathcal{I}_2$$

☞ Si $x_1 + x_2 \in \mathcal{I}_1$, comme $x_1 \in \mathcal{I}_1$, par différence on obtient :

$$x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 \in \mathcal{I}_1$$

ce qui contredit le fait que $x_2 \notin \mathcal{I}_1$.

☞ Si $x_1 + x_2 \in \mathcal{I}_2$, comme $x_2 \in \mathcal{I}_2$, on obtient de même $x_1 \in \mathcal{I}_2$, ce qui contredit $x_1 \notin \mathcal{I}_2$.

Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. La propriété $\mathcal{P}_2$ est donc vraie.

b Hérédité :

Soit $n \geq 3$. Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie, et supposons par l'absurde que $\mathcal{P}_n$ soit fausse. Il existe donc une famille $(\mathcal{I}_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'idéaux premiers et un idéal $\mathcal{I}$ tels

que $\mathcal{I} \subset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k$, mais $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{I}_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

i Justification que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{I} \not\subset \bigcup_{k \neq j} \mathcal{I}_k$:

Si l'on avait $\mathcal{I} \subset \bigcup_{k \neq j} \mathcal{I}_k$, alors par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_{n-1}$ (appliquée aux $n-1$ idéaux $\mathcal{I}_k$ avec $k \neq j$), on en déduirait qu'il existe un indice $k \neq j$ tel que $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_k$, ce qui contredit l'hypothèse de négation de $\mathcal{P}_n$.

ii Construction des éléments x_j :

D'après le point précédent, pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'idéal $\mathcal{I}$ n'est pas inclus dans la réunion des $\mathcal{I}_k$ pour $k \neq j$. Il existe donc un élément $x_j \in \mathcal{I}$ tel que $x_j \notin \mathcal{I}_k$ pour tout $k \neq j$.

iii Appartenance de $z = x_n + x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ à $\mathcal{I}$:

Puisque $x_n \in \mathcal{I}$ et que $\mathcal{I}$ est un idéal stable par addition et multiplication externe (et même interne par les éléments de I), le produit $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ appartient à $\mathcal{I}$ (car $x_1 \in \mathcal{I}$). Par conséquent, leur somme $z \in \mathcal{I}$.

iv Démonstration que $z \notin \mathcal{I}_n$:

Par l'absurde, si $z \in \mathcal{I}_n$, et comme $x_n \in \mathcal{I}_n$, alors comme $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} = z - x_n \in \mathcal{I}_n$. Or, $\mathcal{I}_n$ est premier, et le produit $x_1 \cdots x_{n-1}$ appartient à $\mathcal{I}_n$. Il existerait donc un indice $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $x_j \in \mathcal{I}_n$, ce qui contredit la construction de x_j ($x_j \notin \mathcal{I}_k$ pour $k \neq j$). Ainsi $z \notin \mathcal{I}_n$.

v Généralisation à $z \notin \mathcal{I}_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Supposons $\exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $z \in \mathcal{I}_k$. Comme $x_1 \cdots x_{n-1} \in \mathcal{I}_k$ (car $x_k \in \mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}_k$ idéal de A), alors $x_n = z - x_1 \cdots x_{n-1} \in \mathcal{I}_k$, ce qui n'est pas le cas.

vi Conclusion.

Selon ce qui précède, on a $z \in \mathcal{I} = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{I}_k$, mais $z \notin \mathcal{I}_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui est impossible. Donc finalement $\mathcal{P}_n$ est vraie.

c Théorème des évitements d'idéaux

a Par contraposée dans le résultat précédent, on conclut que : Si un idéal $\mathcal{I}$ de A n'est contenu dans aucun des idéaux premiers $(\mathcal{I}_k)_{1 \leq k \leq n}$, alors $\mathcal{I} \not\subset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k$. Il existe donc au moins un élément $x \in \mathcal{I}$ qui n'appartient à aucun des $\mathcal{I}_k$.

b Prendre dans la question précédente $\mathcal{I} = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k$ qui est un idéal, alors nécessairement l'un des idéaux $\mathcal{I}_j$ contient $\mathcal{I} = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k$, donc contient tous les autres, c'est-à-dire qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\mathcal{I}_j$ contient la réunion, soit $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_j$ pour tout k .

13 Condition de chaîne ascendante dans un anneau principal

On suppose dans cet exercice que A est un anneau principal. On considère une suite croissante d'idéaux de A : $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

a Montrons que $\mathcal{I} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{I}_k$ est un idéal de A .

☞ *Élément neutre* : $0_A \in \mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$, donc $0_A \in \mathcal{I}$.

☞ *Stabilité par addition* : Soient $x, y \in \mathcal{I}$. Il existe des indices $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $x \in \mathcal{I}_i$ et $y \in \mathcal{I}_j$. En posant $N = \max(i, j)$, la suite d'idéaux étant croissante, on a $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{I}_N$ et $\mathcal{I}_j \subset \mathcal{I}_N$. Ainsi $x, y \in \mathcal{I}_N$. Comme $\mathcal{I}_N$ est un idéal, $x + y \in \mathcal{I}_N \subset \mathcal{I}$.

☞ *Stabilité par multiplication externe* : Soit $x \in \mathcal{I}$ (donc $x \in \mathcal{I}_k$ pour un certain k) et soit $a \in A$. Comme $\mathcal{I}_k$ est un idéal, $a \cdot x \in \mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}$.

$\mathcal{I}$ est donc bien un idéal de A .

b Déduisons que $\exists x \in A$ tel que $\mathcal{I} = \langle x \rangle$.

L'anneau A étant supposé **principal**, tout idéal de A est engendré par un élément. L'ensemble $\mathcal{I}$ étant un idéal de A , il existe donc un élément $x \in A$ tel que $\mathcal{I} = \langle x \rangle$.

c Justifions l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathcal{I}_N$.

Puisque $x \in \mathcal{I} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{I}_k$, par définition de la réunion, il existe nécessairement un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathcal{I}_N$.

d **Déduisons que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_N$.**

D'une part, comme $\mathcal{I}_N \subset \mathcal{I}$, on a $\mathcal{I}_N \subset \mathcal{I}$. D'autre part, comme $x \in \mathcal{I}_N$ et que $\mathcal{I}_N$ est un idéal, l'idéal engendré par x est inclus dans $\mathcal{I}_N$, c'est-à-dire $\mathcal{I} = \langle x \rangle \subset \mathcal{I}_N$. Par double inclusion, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_N$.

e **Conclusion.**

Pour tout $n \geq N$, par croissance de la suite, on a $\mathcal{I}_N \subset \mathcal{I}_n \subset \mathcal{I} = \mathcal{I}_N$. Par conséquent, $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_N$ pour tout $n \geq N$.

f **Quel résultat ?**

On a démontré que tout anneau principal est Noethérien.

14 Optimalité de l'annulateur et idéal premier

Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $\text{Ann}(a)$ est maximal pour l'inclusion parmi les $\text{Ann}(x)$ pour $x \neq 0$. Autrement dit : $\forall x \in A \setminus \{0_A\}, \text{Ann}(a) \subset \text{Ann}(x) \implies \text{Ann}(a) = \text{Ann}(x)$.

a **Montrons que $\text{Ann}(x \cdot a) = \text{Ann}(a)$ pour tout $x \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $x \cdot a \neq 0$.**

Soit $y \in \text{Ann}(a)$. Alors $y \cdot a = 0$. Multiplions par x : $x \cdot (y \cdot a) = y \cdot (x \cdot a) = 0$. Cela signifie que $y \in \text{Ann}(x \cdot a)$. Ainsi, $\text{Ann}(a) \subset \text{Ann}(x \cdot a)$. Par maximalité de $\text{Ann}(a)$ parmi les annulateurs, comme $x \cdot a \neq 0$, on a nécessairement l'égalité $\text{Ann}(x \cdot a) = \text{Ann}(a)$.

b **Déduisons que si $x \cdot y \in \text{Ann}(a)$ et si $x \notin \text{Ann}(a)$, alors $y \in \text{Ann}(a)$.**

Supposons que $x \cdot y \in \text{Ann}(a)$ avec $x \notin \text{Ann}(a)$. Comme $x \notin \text{Ann}(a)$, on a $x \cdot a \neq 0$. Considérons le produit $(x \cdot y) \cdot a = x \cdot (y \cdot a) = 0$ (car $xy \in \text{Ann}(a)$). Cela montre que $y \in \text{Ann}(x \cdot a)$. D'après la question précédente, $\text{Ann}(x \cdot a) = \text{Ann}(a)$, donc $y \in \text{Ann}(a)$.

c **Déduisons que $\text{Ann}(a)$ est un idéal premier dans A .**

L'annulateur $\text{Ann}(a)$ est un idéal de A . De plus, comme $a \neq 0$, $1_A \notin \text{Ann}(a)$ (car $1_A \cdot a = a \neq 0$), donc $\text{Ann}(a) \neq A$. Enfin, la question précédente montre exactement la propriété de primalité : pour tous $x, y \in A$, si $xy \in \text{Ann}(a)$ et $x \notin \text{Ann}(a)$, alors $y \in \text{Ann}(a)$. L'idéal $\text{Ann}(a)$ est donc bien un idéal premier.

15 **Diviseurs de zéro et réunion d'annulateurs** On suppose dans cette question que A admet une famille finie d'idéaux maximaux de la forme $(\mathcal{I}_k = \text{Ann}(x_k))_{1 \leq k \leq n}$.

a **Montrons que $\mathcal{D}(A) = \bigcup_{k=1}^n \text{Ann}(x_k)$.**

Inclusion ($\supset$) : Si $x \in \text{Ann}(x_k)$ pour un certain k , alors $x \cdot x_k = 0$ avec $x_k \neq 0$ (car $\text{Ann}(x_k)$ est un idéal maximal d'annulateur, donc propre). Par conséquent, x est un diviseur de zéro, soit $x \in \mathcal{D}(A)$.

Inclusion ($\subset$) : Réciproquement, si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $\exists a \in A$ tel que $a \cdot x = 0_A$, donc $x \in \text{Ann}(a)$, et comme les $\text{Ann}(x_k)$ sont les idéaux maximaux parmi tous les $\text{Ann}(a)$, alors $\exists k \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\text{Ann}(a) \subset \text{Ann}(x_k)$, d'où $x \in \text{Ann}(x_k)$.

b **Déduisons une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(A)$ soit un idéal de A .**

D'après le théorème des évitements d'idéaux, si une réunion finie d'idéaux premiers $\bigcup_{k=1}^n \text{Ann}(x_k)$ est un idéal, alors l'un de ces idéaux contient tous les autres, c'est-à-dire qu'il existe un indice j tel que $\mathcal{D}(A) = \text{Ann}(x_j)$. La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(A)$ soit un idéal est donc que l'un des annulateurs $\text{Ann}(x_j)$ contienne tous les autres, et par raison de maximalité, tous ces idéaux $\text{Ann}(x_j)$ sont égaux. Autrement dit A contient un seul idéal maximal de la forme $\text{Ann}(x)$.

c Si A anneau intègre, cette condition est pleinement vérifiée car $\text{Ann}(x) = \{0_A\}$ pour tout $x \in A$ et en particulier $\mathcal{D}(A) = \{0_A\}$ est bien un idéal de A .

Fin