

DM : Algèbre Générale

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Samedi 26 Septembre 2026 (Durée : 2 heures)

Partie A : Une Fonction arithmétique multiplicative

Une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ est dite **arithmétique multiplicative** si et seulement si elle vérifie la relation suivante : $f(nm) = f(n)f(m)$, pour tous $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge m = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note par $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de ses diviseurs dans $\mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $\phi(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$: $\phi(n) = \sum_{d|n} d$.

① Montrer que n est premier si et seulement si $\phi(n) = n + 1$.

② Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $a \wedge b = 1$.
Montrer que : $a \wedge (bc) = a \wedge c$, $(ab) \wedge c = (a \wedge c)(b \wedge c)$

③ Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge m = 1$.

a Montrer que les applications

$$\psi_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m & \longrightarrow & \mathcal{D}_{nm} \\ (p, q) & \longmapsto & pq \end{array} \quad \text{et} \quad \psi_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{nm} & \longrightarrow & \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \\ d & \longmapsto & (d \wedge n, d \wedge m) \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

b En déduire que : $\text{card}(\mathcal{D}_{nm}) = \text{card}(\mathcal{D}_n)\text{card}(\mathcal{D}_m)$.

c Montrer que tout diviseur d de nm s'écrit sous la forme $d_1 d_2$ où d_1 divise n et d_2 divise m .

d En déduire que l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m & \longrightarrow & \mathcal{D}_{nm} \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 d_2 \end{array}$
est bijective.

e Conclure enfin que $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$

④ Soit p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$, Donner tous les diviseurs de p^α , puis en déduire $\phi(p^\alpha)$.

⑤ En déduire $\phi(n)$ où $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, avec p_i des nombres premiers et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Partie B : Nombres Spéciaux

Partie B.1: Nombres de Mersenne

Ils sont de la forme $M_p = 2^p - 1$ tel que p est premier.

① Montrer que ces nombres sont premiers entre eux deux à deux.

② Soit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^b - 1$ est premier, montrer que b est premier.

Partie B.2: Nombres de Fermat

Ils sont de la forme : $F_n = 2^{2^n} + 1$

① Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$.

② Montrer alors que tous les F_n sont premiers entre eux deux à deux.

③ Soit $a \in \mathbb{N}^*$, tel que $2^a + 1$ est premier.

a Justifier l'existence de $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 2^n(2m + 1)$.

b Montrer que si $m \neq 0$, alors $x^{2m+1} + 1$ n'est jamais premier.

c Conclure alors a est une puissance de 2

Partie B.3: Nombres parfaits vs. Nombres d'Euclide

☞ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\phi(n) = \sum_{d|n} d$

☞ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que n est **parfait** si et seulement si $\phi(n) = 2n$.

☞ On appelle **Nombre d'Euclide** tout entier naturel de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ tel que p et $2^p - 1$ soient premiers.

① Soit $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ un nombre d'Euclide. Trouver tous les diviseurs de E_p .

② En déduire que les nombres d'Euclide sont tous parfaits

③ Soit N un nombre parfait pair.

a Montrer que : $\exists m \in \mathbb{N}, \exists q \text{ impair tel que : } N = 2^m q$

b Montrer que $\exists r \in \mathbb{N}^*$ tel que $q = (2^{m+1} - 1)r$ et $\phi(q) = 2^{m+1}r$.
On pourra utiliser le fait que N est parfait.

c Montrer que $r = 1$.

d Montrer que $p, 2^p - 1$ sont premiers où $p = m + 1$

e Conclure.

☞ Remarque : A l'heure actuelle on ne sait pas s'ils existent des nombres parfaits impairs.

Partie C : p -valuation

Soient $n \geq 2$ et p premier.

On pose $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^k \text{ divise } n\}$ (p -**valuation** de n).

① Montrer que $v_p(n)$ est bien définie.

② Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

③ En déduire que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 : p^{i+j} \leq n \implies E\left(\frac{1}{p^j} E\left(\frac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^{i+j}}\right)$

④ On pose $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$, montrer que : $v_p(n!) = m + v_p(m!)$.

⑤ **Applications :**

☞ Calculer $v_7(10000!)$.

☞ Décomposer $16!$ en produits de facteurs premiers.

☞ Montrer qu'en base 10, $1000!$ se termine par 249 zéros.

FiN

Corrigé

Partie A : Une Fonction arithmétique multiplicative

① Caractérisation des nombres premiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un entier $n \geq 2$ est premier si et seulement si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et n . Dans ce cas, la somme de ses diviseurs est exactement $\phi(n) = 1 + n$. Réciproquement, si $\phi(n) = n + 1$, comme 1 et n divisent toujours n (pour $n \geq 2$), et que leur somme vaut $n + 1$, ce sont les seuls diviseurs de n . Donc n est premier (si $n = 1$, $\phi(1) = 1 \neq 1 + 1$).

② Propriétés du PGCD avec $a \wedge b = 1$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $a \wedge b = 1$.

☞ **Montrons que $a \wedge (bc) = a \wedge c$:** Posons $\delta = a \wedge (bc)$ et $d = a \wedge c$. Puisque $d \mid a$ et $d \mid c$, on a $d \mid (bc)$. Donc d divise a et bc , ce qui implique $d \mid \delta$. Inversement, $\delta \mid a$ et $\delta \mid bc$. Puisque $a \wedge b = 1$ et $\delta \mid a$, on a nécessairement $\delta \wedge b = 1$. D'après le lemme de Gauss, comme $\delta \mid bc$ et $\delta \wedge b = 1$, on a $\delta \mid c$. Ainsi, δ divise a et c , donc $\delta \mid d$. Puisque $d \mid \delta$ et $\delta \mid d$ avec des entiers positifs, $a \wedge (bc) = a \wedge c$.

☞ **Montrons que $(ab) \wedge c = (a \wedge c)(b \wedge c)$:** Utilisons la décomposition en facteurs premiers. Pour tout nombre premier p , notons $v_p(x)$ la valuation p -adique de x . $a \wedge b = 1 \implies \min(v_p(a), v_p(b)) = 0$ pour tout p . Calculons la valuation de $(ab) \wedge c$:

$$v_p((ab) \wedge c) = \min(v_p(ab), v_p(c)) = \min(v_p(a) + v_p(b), v_p(c))$$

Puisque l'un au moins des entiers $v_p(a)$ ou $v_p(b)$ est nul, disons $v_p(b) = 0$, on a :

$$\min(v_p(a) + 0, v_p(c)) = \min(v_p(a), v_p(c)) + 0 = \min(v_p(a), v_p(c)) + \min(v_p(b), v_p(c))$$

Ceci est valable pour tout p , donc les décompositions en facteurs premiers coïncident. D'où $(ab) \wedge c = (a \wedge c)(b \wedge c)$.

③ Multiplicativité de ϕ avec $n \wedge m = 1$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge m = 1$.

a) Bijections réciproques ψ_1 et ψ_2 On a $\psi_1(p, q) = pq$ et $\psi_2(d) = (d \wedge n, d \wedge m)$.

☞ $\psi_1 \circ \psi_2(d) = \psi_1(d \wedge n, d \wedge m) = (d \wedge n)(d \wedge m)$. Puisque $n \wedge m = 1$, on applique le résultat de la Q2 : $(n \wedge d)(m \wedge d) = (nm) \wedge d$. Or d est un diviseur de nm , donc $(nm) \wedge d = d$. D'où $\psi_1 \circ \psi_2 = \text{Id}_{\mathcal{D}_{nm}}$.

☞ $\psi_2 \circ \psi_1(p, q) = \psi_2(pq) = ((pq) \wedge n, (pq) \wedge m)$. Comme $p \mid n$ et $q \mid m$ avec $n \wedge m = 1$, on a $p \wedge m = 1$ et $q \wedge n = 1$. D'après Q2 : $(pq) \wedge n = p \wedge n = p$ (car $p \mid n$). De même $(pq) \wedge m = q \wedge m = q$. Donc $\psi_2 \circ \psi_1(p, q) = (p, q)$, ce qui prouve que $\psi_2 \circ \psi_1 = \text{Id}_{\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m}$.

Les applications sont bien des bijections réciproques l'une de l'autre.

b) Cardinaux

L'existence d'une bijection entre $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}_{nm}$ implique l'égalité de leurs cardinaux :

$$\text{card}(\mathcal{D}_{nm}) = \text{card}(\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m) = \text{card}(\mathcal{D}_n) \times \text{card}(\mathcal{D}_m)$$

c) Décomposition des diviseurs

Tout diviseur d de nm s'écrit $d = \psi_1(\psi_2(d)) = \psi_1(d \wedge n, d \wedge m) = (d \wedge n) \times (d \wedge m)$. En posant $d_1 = d \wedge n$ (qui divise n) et $d_2 = d \wedge m$ (qui divise m), on a bien $d = d_1 d_2$.

d) Bijectivité de f

L'application $f(d_1, d_2) = d_1 d_2$ n'est autre que l'application ψ_1 étudiée à la question 3.a. Ayant déjà prouvé que ψ_1 admet une bijection réciproque ψ_2 , on en déduit immédiatement que f est bijective.

e) Conclusion sur $\phi(nm)$ La somme des diviseurs de nm est :

$$\phi(nm) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{nm}} d$$

Grâce à la bijection f , sommer sur $d \in \mathcal{D}_{nm}$ revient à sommer sur les couples $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$:

$$\phi(nm) = \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_n} \sum_{d_2 \in \mathcal{D}_m} f(d_1, d_2) = \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_n} \sum_{d_2 \in \mathcal{D}_m} d_1 d_2$$

On peut séparer les sommes car les variables sont indépendantes :

$$\phi(nm) = \left(\sum_{d_1 \in \mathcal{D}_n} d_1 \right) \left(\sum_{d_2 \in \mathcal{D}_m} d_2 \right) = \phi(n)\phi(m)$$

La fonction ϕ est donc **arithmétique multiplicative**.

- ④ **Diviseurs et somme pour p^α** Soit p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. Les diviseurs de la puissance d'un nombre premier p^α sont les p^k pour $0 \leq k \leq \alpha$. Ainsi, $\mathcal{D}_{p^\alpha} = \{1, p, p^2, \dots, p^\alpha\}$. La somme de ces diviseurs est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $p \neq 1$:

$$\phi(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^k = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$$

- ⑤ **Expression générale de $\phi(n)$** Soit la décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. Les facteurs $p_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux (puisque les p_i sont des nombres premiers distincts). Par multiplicativité de ϕ (démontrée à la question 3.e), on a :

$$\phi(n) = \phi \left(\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} \right) = \prod_{i=1}^r \phi(p_i^{\alpha_i})$$

En remplaçant par l'expression trouvée à la question 4, on obtient :

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Partie B : Nombres Spéciaux

Partie B.1: Nombres de Mersenne

- ① Soient $M_p = 2^p - 1$ et $M_q = 2^q - 1$ deux nombres de Mersenne distincts avec $p < q$ deux nombres premiers.

D'après Ex 31 Q2 du TD algèbre générale, $M_p \wedge M_q = (2^p - 1) \wedge (2^q - 1) = 2^{p \wedge q} - 1$. Comme p et q sont des nombres premiers distincts, $p \wedge q = 1$.

D'où $M_p \wedge M_q = 2^1 - 1 = 1$. Ils sont donc premiers entre eux deux à deux.

- ② Si b n'était pas premier, il existerait une factorisation $b = xy$ avec $1 < x < b$ et $1 < y < b$. On aurait alors $2^b - 1 = (2^x)^y - 1 = (2^x - 1)((2^x)^{y-1} + \dots + 1)$. Comme $x > 1$, $2^x - 1 > 1$, et comme $y > 1$, le second facteur est aussi > 1 . $2^b - 1$ serait donc composé, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi b est premier.

Partie B.2: Nombres de Fermat

- ① Par récurrence sur $n \geq 1$:

👁 **Initialisation** : Pour $n = 1$, $\prod_{k=0}^0 F_k = F_0 = 3$. Or $F_1 - 2 = 5 - 2 = 3$. Vrai.

👁 **Hérédité** : Si $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$, alors :

$$\prod_{k=0}^n F_k = (F_n - 2)F_n = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2$$

- ② Soient $m < n$. D'après Q1, F_m divise $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$.

Si $d = F_m \wedge F_n$, alors $d \mid F_n$ et $d \mid (F_n - 2)$, donc $d \mid 2$.

Comme $F_m = 2^{2^m} + 1$ est toujours impair, d est impair. Ainsi $d = 1$.

- ③ **a** Tout entier $a \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $a = 2^n m'$ où m' est impair. En posant $m' = 2m + 1$, on a $a = 2^n(2m + 1)$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

b Si $m \neq 0$, $2m + 1 \geq 3$ est un entier impair. On utilise l'identité pour q impair :

$$x^q + 1 = (x + 1) \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j x^{q-1-j}$$

Pour $x = 2^n$ et $q = 2m + 1$, $x^{2m+1} + 1 = (2^n + 1)C$ avec $1 < 2^n + 1 < x^{2m+1} + 1$.
Le nombre est donc strictement composé.

- c** Pour que $2^a + 1$ soit premier, il faut impérativement que $m = 0$, soit $a = 2^n(2(0) + 1) = 2^n$. a est donc une puissance de 2.

Partie B.3: Nombres parfaits vs. Nombres d'Euclide

- Soit $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ où p et $q = 2^p - 1$ sont premiers.
Puisque $\text{pgcd}(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$, les diviseurs de E_p sont tous les produits $2^k \cdot (2^p - 1)^j$ avec $0 \leq k \leq p - 1$ et $j \in \{0, 1\}$.
 $\mathcal{D}_{E_p} = \{2^k \mid 0 \leq k \leq p - 1\} \cup \{2^k(2^p - 1) \mid 0 \leq k \leq p - 1\}$.
- La fonction somme des diviseurs ϕ est multiplicative. Comme $\text{pgcd}(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$:
 $\phi(E_p) = \phi(2^{p-1})\phi(2^p - 1) = (2^p - 1)(1 + (2^p - 1)) = (2^p - 1)2^p = 2 \cdot 2^{p-1}(2^p - 1) = 2E_p$
Ainsi, E_p est un nombre parfait.
- Soit N un nombre parfait pair.
 - On extrait la plus grande puissance de 2 divisant N : $N = 2^m q$ avec $m \geq 1$ et q impair.
 - Comme $\text{pgcd}(2^m, q) = 1$, $\phi(N) = \phi(2^m)\phi(q) = (2^{m+1} - 1)\phi(q)$.
Comme N est parfait, $\phi(N) = 2N = 2^{m+1}q$. D'où :
$$(2^{m+1} - 1)\phi(q) = 2^{m+1}q \implies 2^{m+1} \mid (2^{m+1} - 1)\phi(q) \implies 2^{m+1} \mid \phi(q)$$

Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\phi(q) = 2^{m+1}r$.
En remplaçant $\phi(q)$ dans l'égalité, $(2^{m+1} - 1)2^{m+1}r = 2^{m+1}q \implies q = (2^{m+1} - 1)r$.
 - Supposons $r > 1$. Alors q possède au moins trois diviseurs distincts : 1, r , et $q = (2^{m+1} - 1)r$.
Ainsi $\phi(q) \geq 1 + r + q = 1 + r + (2^{m+1} - 1)r = 2^{m+1}r + 1 > \phi(q)$, ce qui est absurde.
Donc $r = 1$.

- Comme $r = 1$, on a $q = 2^{m+1} - 1$ et $\phi(q) = 2^{m+1} = q + 1$.
La somme des diviseurs de q étant $q + 1$, q n'a pour diviseurs que 1 et lui-même : $q = 2^{m+1} - 1$ est premier.
Pour que $2^{m+1} - 1$ soit premier, son exposant $p = m + 1$ doit également être premier (d'après le résultat classique sur les nombres de Mersenne).
- Conclusion : Tout nombre parfait pair N s'écrit sous la forme $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ où p et $2^p - 1$ sont premiers (Théorème d'Euclide-Euler).

Partie C : p-valuation

- Existence et définition de $v_p(n)$** Soit l'ensemble $K_n = \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \text{ divise } n\}$.
 - Non-vacuité : $p^0 = 1$ divise tout entier n , donc $0 \in K_n \neq \emptyset$.
 - Majoration : Pour tout $k \in K_n$, $p^k \leq n$. Comme $p \geq 2$, on a $2^k \leq p^k \leq n$, d'où $k \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$. L'ensemble K_n est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.

K_n admet donc un plus grand élément, ce qui prouve que $v_p(n)$ est bien définie. ■
- Démonstration de $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière de nx , on a :

$$E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$$

En divisant par $n > 0$:

$$\frac{E(nx)}{n} \leq x < \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n}$$

Par ailleurs, effectuons la division euclidienne de $E(nx)$ par n : $E(nx) = n \cdot q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < n$. Ainsi, $\frac{E(nx)}{n} = q + \frac{r}{n}$.

- D'une part, $q \leq q + \frac{r}{n} = \frac{E(nx)}{n} \leq x$.
- D'autre part, $x < \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n} = q + \frac{r+1}{n} \leq q + \frac{n}{n} = q + 1$.

On a donc obtenu $q \leq x < q + 1$ avec $q \in \mathbb{Z}$. Par unicité de la partie entière, $E(x) = q = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$. ■

- ③ **Dédution pour** $E\left(\frac{1}{p^j}E\left(\frac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^{i+j}}\right)$ Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p^{i+j} \leq n$. Appliquons la relation de la question 2 en posant $x = \frac{n}{p^{i+j}}$ et le multiplicateur entier $N = p^j$:

$$N \cdot x = p^j \cdot \frac{n}{p^{i+j}} = \frac{n}{p^i}$$

D'après la question 2, $E\left(\frac{E(Nx)}{N}\right) = E(x)$, ce qui donne directement :

$$E\left(\frac{1}{p^j}E\left(\frac{n}{p^i}\right)\right) = E\left(\frac{n}{p^{i+j}}\right) \quad \blacksquare$$

- ④ **Relation de récurrence** $v_p(n!) = m + v_p(m!)$ où $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$

Soit $n! = \prod_{k=1}^n k$. Les multiples de p compris entre 1 et n sont $p, 2p, 3p, \dots, m \cdot p$ où $m = E\left(\frac{n}{p}\right)$.

Séparons les facteurs de $n!$ en multiples de p et non-multiples de p :

$$n! = \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ p \nmid k}} k \right) \times \prod_{j=1}^m (j \cdot p) = \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ p \nmid k}} k \right) \times p^m \cdot m!$$

Puisque le premier produit n'est pas divisible par p , sa p -valuation est nulle. Par additivité de la valuation p -adique $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$:

$$v_p(n!) = v_p(p^m) + v_p(m!) = m + v_p(m!) \quad \blacksquare$$

Remarque (Formule de Legendre) : En réitérant cette relation, on obtient :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$$

- ⑤ **Applications**

- a **Calcul de** $v_7(10000!)$ Appliquons la formule de Legendre pour $n = 10000$ et $p = 7$:

$$E\left(\frac{10000}{7}\right) = 1428$$

$$E\left(\frac{1428}{7}\right) = 204$$

$$E\left(\frac{204}{7}\right) = 29$$

$$E\left(\frac{29}{7}\right) = 4$$

$$E\left(\frac{4}{7}\right) = 0$$

D'où :

$$v_7(10000!) = 1428 + 204 + 29 + 4 = 1665$$

- b **Décomposition de 16! en produit de facteurs premiers** Les nombres premiers $p \leq 16$ sont 2, 3, 5, 7, 11, 13. Calculons leur valuation dans 16! :

$$v_2(16!) = E(16/2) + E(16/4) + E(16/8) + E(16/16) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

$$v_3(16!) = E(16/3) + E(16/9) = 5 + 1 = 6$$

$$v_5(16!) = E(16/5) = 3$$

$$v_7(16!) = E(16/7) = 2$$

$$v_{11}(16!) = E(16/11) = 1$$

$$v_{13}(16!) = E(16/13) = 1$$

Ainsi, la décomposition en facteurs premiers de 16! est :

$$16! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

- c **Nombre de zéros à la fin de 1000! en base 10** Le nombre de zéros à la fin de 1000! est égal au plus grand entier k tel que 10^k divise 1000!, soit $v_{10}(1000!) = \min(v_2(1000!), v_5(1000!))$. Puisque $v_2(1000!) > v_5(1000!)$, ce nombre est égal à $v_5(1000!)$:

$$\begin{aligned} v_5(1000!) &= E\left(\frac{1000}{5}\right) + E\left(\frac{1000}{25}\right) + E\left(\frac{1000}{125}\right) + E\left(\frac{1000}{625}\right) \\ &= 200 + 40 + 8 + 1 = 249 \end{aligned}$$

En base 10, 1000! se termine donc par 249 zéros. $\blacksquare$