# DM : Réduction

## Diagonalisation Simultanée

Samedi 14 Novembre 2026 (Durée : 1 heure)

**Vocabulaire** :

☞ Deux **endomorphismes** $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont dits **simultanément diagonalisables**, si elles sont diagonalisable et admettent une base propre commune.

☞ Deux **matrices** $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dits **simultanément diagonalisables**, si elles sont diagonalisables et semblables à deux matrices diagonales à l'aide de la même matrice de passage.

(1) Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.
On pose : $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$.
Montrer que $u$ et $v$ sont simultanément diagonalisables $\Leftrightarrow$ $M$ et $N$ le sont aussi.

(2) Montrer que si deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont simultanément diagonalisables, alors leurs somme $M + N$ et produit $M.N$ sont aussi diagonalisables et même simultanément diagonalisables.

(3) On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

- [a] Vérifier que $M$ et $N$ sont diagonalisables.
- [b] Vérifier que $M + N$ et $MN$ ne le sont pas.
- [c] Conclure.

(4) **Cas particulier** : On suppose que $u \circ v = v \circ u$ et que $\chi_u$ est scindé à racines simples.

- [a] Dire pourquoi $u$ est diagonalisable.
- [b] Dire pourquoi $\dim E_\lambda(u) = 1$, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$.
  On pose $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ et $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_i\}$.
- [c] Dire pourquoi $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de $E$.
- [d] Justifier que $v(\varepsilon_i) \in E_{\lambda_i}(u)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- [e] En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \alpha_i$ tel que $v(\varepsilon_i) = \alpha_i.\varepsilon_i$.
- [f] Conclure que $u$ et $v$ sont simultanément diagonalisables.

(5) **Cas général** : On suppose que $u \circ v = v \circ u$ et que $u$ et $v$ sont diagonalisable.
On pose $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i \neq j$.

- [a] Dire pourquoi $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.
- [b] Dire pourquoi chaque $E_i = E_{\lambda_i}(u)$ est stable par $v$.
- [c] En déduire que chaque $v_{|E_i}$ est diagonalisable.
- [d] En déduire que $v_{|E_i}$ et $u_{|E_i}$ sont simultanément diagonalisables
- [e] Conclure que $u$ et $v$ sont simultanément diagonalisables.

**FiN**

# Corrigé

**1** ☞ **Sens direct** ( $\Longrightarrow$ ) **:** Supposons que $u$ et $v$ sont simultanément diagonalisables. Il existe alors une base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ constituée de vecteurs propres communs à $u$ et $v$. Ainsi, les matrices représentatives $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = D_1$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(v) = D_2$ sont toutes deux diagonales.

Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. D'après la formule de changement de base :

$$D_1 = P^{-1}MP \quad \text{et} \quad D_2 = P^{-1}NP$$

Les matrices $M$ et $N$ sont donc semblables aux matrices diagonales $D_1$ et $D_2$ par la même matrice inversibles $P$. Par conséquent, $M$ et $N$ sont simultanément diagonalisables.

☞ **Sens réciproque** ( $\Longleftarrow$ ) **:** Supposons que $M$ et $N$ sont simultanément diagonalisables. Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et deux matrices diagonales $D_1, D_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$M = PD_1P^{-1} \quad \text{et} \quad N = PD_2P^{-1}$$

Considérons la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $P$, c'est-à-dire $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = P$. Comme $P$ est inversible, $\mathcal{C}$ est une base de $E$.

Par changement de base, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = P^{-1}MP = D_1$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(v) = P^{-1}NP = D_2$. Puisque $D_1$ et $D_2$ sont diagonales, chaque vecteur de la base $\mathcal{C}$ est un vecteur propre commun à $u$ et $v$. Ainsi, $u$ et $v$ possèdent une base propre commune, ce qui prouve qu'ils sont simultanément diagonalisables.

**2** Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices simultanément diagonalisables.

Par hypothèse, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et deux matrices diagonales $D_1, D_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$M = PD_1P^{-1} \quad \text{et} \quad N = PD_2P^{-1}$$

Calculons la somme et le produit de ces deux matrices :

☞ **Pour la somme :**

$$M + N = PD_1P^{-1} + PD_2P^{-1} = P(D_1 + D_2)P^{-1}$$

Puisque l'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $D_1 + D_2$ est diagonale. Donc $M + N$ est diagonalisable.

☞ **Pour le produit :**

$$M \cdot N = (PD_1P^{-1})(PD_2P^{-1}) = PD_1(P^{-1}P)D_2P^{-1} = P(D_1D_2)P^{-1}$$

Le produit de deux matrices diagonales $D_1D_2$ est également une matrice diagonale. Donc $M \cdot N$ est diagonalisable.

Comme $M, N, M + N$ et $MN$ sont toutes semblables à des matrices diagonales via la **même** matrice de passage $P$, les matrices $M + N$ et $MN$ sont diagonalisables et même simultanément diagonalisables avec $M$ et $N$.

**3** On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**a** **Vérifions que $M$ et $N$ sont diagonalisables.**

☞ La matrice $M$ est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$.

☞ La matrice $N$ est triangulaire inférieure. Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Sp}(N) = \{1, 2\}$.

En dimension 2, $M$ et $N$ possèdent chacune 2 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$. Elles sont donc toutes les deux diagonalisables.

**b** **Vérifions que $M+N$ et $MN$ ne sont pas diagonalisables (sur $\mathbb{R}$).** Calculons d'abord $M + N$ et $MN$ :

$$M + N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MN = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculons leurs polynômes caractéristiques sur $\mathbb{R}$ :

☞ $\chi_{M+N}(X) = \det(XI_2 - (M+N)) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 2 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2)(X-4)+2 = X^2 - 6X + 10$.
Le discriminant de ce polynôme du second degré est :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 36 - 40 = -4 < 0$$

$\chi_{M+N}$ n'a aucune racine réelle. $M+N$ n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

☞ $\chi_{MN}(X) = \det(XI_2 - MN) = \begin{vmatrix} X+1 & -2 \\ 4 & X-4 \end{vmatrix} = (X+1)(X-4)+8 = X^2 - 3X + 4$.
Le discriminant est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$$

$\chi_{MN}$ n'a aucune racine réelle. $MN$ n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**c** **Conclusion.** La réciproque de la propriété démontrée à la question 2 est fausse : le fait que deux matrices soient diagonalisables ne garantit pas que leur somme ou leur produit soit diagonalisable. Pour cela, il est nécessaire qu'elles soient **simultanément** diagonalisables (ce qui impose notamment qu'elles commutent).

**4** On suppose que $u \circ v = v \circ u$ et que $\chi_u$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

**a** **Pourquoi $u$ est diagonalisable.** Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ est diagonalisable.

**b** **Pourquoi $\dim E_\lambda(u) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.** Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, l'encadrement classique des dimensions des sous-espaces propres donne :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$$

où $m(\lambda)$ est la multiplicité algébrique de $\lambda$ dans $\chi_u$. Comme toutes les racines de $\chi_u$ sont simples, $m(\lambda) = 1$, d'où $\dim E_\lambda(u) = 1$.
On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_i\}$ avec $\varepsilon_i \neq 0$.

**c** **Pourquoi $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de $E$.** Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme sont en somme directe. La famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est donc une famille libre de $n$ vecteurs dans un espace vectoriel $E$ de dimension $n = \deg(\chi_u)$. C'est donc une base de $E$.

**d** **Justifions que $v(\varepsilon_i) \in E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.**
Puisque $u$ et $v$ commutent ($u \circ v = v \circ u$), tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$. En particulier, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par $v$. Comme $\varepsilon_i \in E_{\lambda_i}(u)$, on a directement $v(\varepsilon_i) \in E_{\lambda_i}(u)$.

**e** **Déduisons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(\varepsilon_i) = \alpha_i \cdot \varepsilon_i$.** Comme $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_i\}$ est de dimension 1, tout élément de cet espace est un multiple colinéaire de $\varepsilon_i$. Puisque $v(\varepsilon_i) \in E_{\lambda_i}(u)$, il existe un scalaire $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(\varepsilon_i) = \alpha_i \cdot \varepsilon_i$.

**f** **Concluons que $u$ et $v$ sont simultanément diagonalisables.** Par construction, la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vérifie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ :

$$u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i \quad \text{et} \quad v(\varepsilon_i) = \alpha_i \varepsilon_i$$

Les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont donc simultanément des vecteurs propres pour $u$ et pour $v$. Ainsi, $u$ et $v$ admettent une base propre commune, ce qui prouve qu'ils sont simultanément diagonalisables.

**5** On suppose désormais que $u \circ v = v \circ u$, et que $u$ et $v$ sont tous deux diagonalisables. On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i \neq j$.

**a** **Pourquoi $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.** L'endomorphisme $u$ est diagonalisable par hypothèse. Par caractérisation des endomorphismes diagonalisables, l'espace vectoriel $E$ est égal à la somme directe de ses sous-espaces propres.

**b** **Pourquoi chaque $E_i = E_{\lambda_i}(u)$ est stable par $v$.** Puisque $u \circ v = v \circ u$, les sous-espaces propres de $u$ sont stables par $v$. En effet, pour tout $x \in E_{\lambda_i}(u)$ :

$$u(v(x)) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$$

Donc $v(x) \in E_{\lambda_i}(u) = E_i$. Ainsi, $E_i$ est stable par $v$.

**c** **Déduisons que chaque endomorphisme induit $v_{|E_i}$ est diagonalisable.** D'après le cours de réduction sur la stabilité des endomorphismes diagonalisables : *la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est elle-même diagonalisable.* Comme $v$ est diagonalisable sur $E$ et $E_i$ est stable par $v$, l'endomorphisme induit $v_{|E_i} \in \mathcal{L}(E_i)$ est diagonalisable.

**d** **Déduisons que $v_{|E_i}$ et $u_{|E_i}$ sont simultanément diagonalisables.** Par définition de $E_i = E_{\lambda_i}(u)$, la restriction de $u$ à $E_i$ est l'homothétie de rapport $\lambda_i$ :

$$u_{|E_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$$

Ainsi, **toute** base de $E_i$ est une base de vecteurs propres pour $u_{|E_i}$.

Comme $v_{|E_i}$ est diagonalisable sur $E_i$ (d'après c), il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $E_i$ constituée de vecteurs propres de $v_{|E_i}$. Cette base $\mathcal{B}_i$ diagonalise également $u_{|E_i}$ (puisqu'il s'agit d'une homothétie). Les endomorphismes induits $u_{|E_i}$ et $v_{|E_i}$ sont donc simultanément diagonalisables sur $E_i$.

e **Concluons que $u$ et $v$ sont simultanément diagonalisables.** Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_i$ formée de vecteurs propres communs à $u_{|E_i}$ et $v_{|E_i}$.

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$, la concaténation de ces bases :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$$

forme une base de $E$. Tous les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de $u$ et de $v$.

**Conclusion générale :** Deux endomorphismes (ou matrices) diagonalisables sont simultanément diagonalisables si et seulement s'ils (ou elles) commutent.

**FiN**