DM : Réduction

Décomposition de Dunford

Samedi 14 Novembre 2026 (Durée : 1 heure)

Notations

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
- On pose $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, où $\lambda_i \neq \lambda_j$, pour tout $i \neq j$.
- On note, pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, $F_i = \ker\left((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}\right)$. On rappelle que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
- Pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, on note p_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$.
- $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{id}_E$. Chaque p_i est un polynôme en u.
- $p_i(x_i) = x_i$ pour tout $x_i \in F_i$.
- $p_j(x_i) = 0_E$ pour tout $x_i \in F_i$ et $j \neq i$.

(1) On pose $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i . p_i$.

- [a] Montrer que pour tout $x_i \in F_i$, on a $v(x_i) = \lambda_i . x_i$.
- [b] Soit $\mathcal{B}$ base adaptée à la somme $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
  Justifier que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale. En déduire que v est diagonalisable.
- [c] Dire pourquoi v est un polynôme en u.
- [d] Montrer que $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.

(2) On pose $w = u - v$.

- [a] Vérifier que $w = \sum_{i=1}^{r}(u-\lambda_i \mathrm{id}_E)\circ p_i$.
- [b] Dire pourquoi chaque F_i est stable par w.
- [c] Justifier que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a : $w_{|F_i} = u - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$
- [d] En déduire que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a : $w_{|F_i}^{\alpha_i} = 0_E$.
- [e] En déduire que $w^{\alpha} = 0$, où $\alpha = \max\left(\alpha_i\right)_{1\leqslant i\leqslant r}$.
  Autrement dit w est nilpotent.

(3)
- [a] Dire pourquoi w est un polynôme en u.
- [b] En déduire que v et w commutent.

Décomposition de Dunford (Existence) : Tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u(X)$ est scindé s'écrit sous la forme $u = v + w$ tel que :

- v diagonalisable et w nilpotent.
- v et w sont des polynômes en u donc commutent.
- $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.

(4) **Unicité de la décomposition de Dunford.**
On suppose que u admet une autre décomposition de Dunford : $u = v' + w'$.

- [a] Dire pourquoi $v - v'$ est diagonalisable.
  - **Indication** : On pourra utiliser les résultats du DM : Diagonalisation Simultanée.
- [b] Montrer $w' - w$ est nilpotent.
- [c] En déduire que $v = v'$ et $w = w'$.
  Autrement dit : la décomposition de Dunford est unique.

FiN

Corrigé

(1) On pose $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$.

a **Montrons que pour tout $x_i \in F_i$, $v(x_i) = \lambda_i x_i$.**
Soit $i \in \{1, \dots, r\}$ et soit $x_i \in F_i$. Par définition de v et linéarité :

$$v(x_i) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j p_j(x_i).$$

En utilisant les propriétés rappelées ci-dessus :

- ☞ Pour $j \neq i$, $p_j(x_i) = 0_E$.
- ☞ Pour $j = i$, $p_i(x_i) = x_i$.

Le seul terme non nul dans la somme correspond donc à $j = i$, ce qui donne :

$$v(x_i) = \lambda_i p_i(x_i) = \lambda_i x_i.$$

b **b) Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. Justifions que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale. Déduisons que v est diagonalisable.**

Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, où chaque $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,\alpha_i})$ est une base de F_i.
D'après la question **1.a**, pour tout vecteur $e \in \mathcal{B}_i$, on a $v(e) = \lambda_i e$. Par conséquent, la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale par blocs (et ici strictement diagonale) :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{\alpha_1}, \lambda_2 I_{\alpha_2}, \dots, \lambda_r I_{\alpha_r}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix}.$$

La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ étant diagonale, l'endomorphisme v admet une base de vecteurs propres. Ainsi, v est diagonalisable.

c **Pourquoi v est un polynôme en u.**
Chaque projecteur p_i est un polynôme en u (i.e. $\exists P_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que $p_i = P_i(u)$). Par conséquent, $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i(u) = Q(u)$ où $Q(X) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i(X) \in \mathbb{K}[X]$.
v s'exprime donc bien comme une combinaison linéaire de polynômes en u, c'est donc un polynôme en u.

d **Montrons que $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.**
Calculons le polynôme caractéristique de v à l'aide de sa représentation matricielle dans la base adaptée $\mathcal{B}$:

$$\chi_v(X) = \det(X\mathrm{id}_E - v) = \det(XI_n - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)).$$

Comme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ est une matrice diagonale contenant λ_i répété α_i fois pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a immédiatement :

$$\chi_v(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} = \chi_u(X).$$

(2) On pose $w = u - v$.

a **Vérifions que $w = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \circ p_i$.**

Puisque $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{id}_E$, on a $u = u \circ \mathrm{id}_E = u \circ \left(\sum_{i=1}^{r} p_i \right) = \sum_{i=1}^{r} u \circ p_i$. D'autre part, $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. Par linéarité et distributivité de la composition :

$$w = u - v = \sum_{i=1}^{r} u \circ p_i - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{r} (u \circ p_i - \lambda_i p_i) = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \circ p_i.$$

b **Pourquoi chaque F_i est stable par w.**
Par définition, $F_i = \ker((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i})$ est le noyau d'un polynôme en u. Or tout sous-espace noyau d'un polynôme en u est stable par u. De plus, $v = Q(u)$ est un polynôme en u, donc $w = u - v = (X - Q(X))(u)$ est également un polynôme en u. Puisque tout polynôme en u commute avec u, le sous-espace F_i est naturellement stable par w.

c **Justifions que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $w_{|F_i} = u_{|F_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$.**
Soit $x_i \in F_i$. D'après la question **1.a**, $v(x_i) = \lambda_i x_i$. Ainsi :

$$w(x_i) = (u-v)(x_i) = u(x_i) - v(x_i) = u(x_i) - \lambda_i x_i = (u_{|F_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})(x_i).$$

Puisque ceci vaut pour tout $x_i \in F_i$, l'endomorphisme induit $w_{|F_i}$ est bien égal à $u_{|F_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$.

d **Déduisons que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $w_{|F_i}^{\alpha_i} = 0_E$.**
En utilisant la question **2.c** :

$$w_{|F_i}^{\alpha_i} = (u_{|F_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})^{\alpha_i} = ((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i})_{|F_i}.$$

Par définition du sous-espace caractéristique $F_i = \ker((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i})$, pour tout $x_i \in F_i$, $(u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}(x_i) = 0_E$. Par conséquent, $w_{|F_i}^{\alpha_i} = 0_{\mathcal{L}(F_i)}$.

e **Déduisons que $w^\alpha = 0$, où $\alpha = \max_{1\le i\le r}(\alpha_i)$. Autrement dit que w est nilpotent.**
Soit $\alpha = \max_{1\le i\le r}(\alpha_i)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, comme $\alpha \ge \alpha_i$, on a $w_{|F_i}^{\alpha} = w_{|F_i}^{\alpha-\alpha_i} \circ w_{|F_i}^{\alpha_i} = 0$. Soit maintenant $x \in E$. Puisque $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \dots, x_r)$ avec $x_i \in F_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^r x_i$. Par linéarité de w^α :

$$w^\alpha(x) = w^\alpha\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) = \sum_{i=1}^r w^\alpha(x_i) = \sum_{i=1}^r w_{|F_i}^{\alpha}(x_i) = \sum_{i=1}^r 0_E = 0_E.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $w^\alpha = 0_{\mathcal{L}(E)}$. L'endomorphisme w est donc nilpotent.

3 **a** **Pourquoi w est un polynôme en u.**
On a $w = u - v$. Or $u = P(u)$ avec $P(X) = X$, et d'après la question **1.c**, $v = Q(u)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi $w = (X - Q(X))(u) = R(u)$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$. w est donc bien un polynôme en u.

b **Déduisons que v et w commutent.**
Puisque $v = Q(u)$ et $w = R(u)$ sont deux polynômes en le même endomorphisme u, ils commutent nécessairement :

$$v \circ w = Q(u) \circ R(u) = (QR)(u) = (RQ)(u) = R(u) \circ Q(u) = w \circ v.$$

Bilan : Décomposition de Dunford (Existence) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un couple d'endomorphismes $(v, w) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
- $u = v + w$.
- v est diagonalisable et w est nilpotent.
- v et w sont des polynômes en u (donc $v \circ w = w \circ v$).
- $\chi_v(X) = \chi_u(X)$.

4 On suppose que u admet une autre décomposition de Dunford $u = v' + w'$, où :
- v' est diagonalisable et w' est nilpotent,
- v' et w' commutent ($v' \circ w' = w' \circ v'$).

a **Pourquoi $v - v'$ est diagonalisable.**
Montrons d'abord que v' commute avec u. Puisque $u = v' + w'$ et $v'w' = w'v'$, on a :

$$u \circ v' = (v' + w') \circ v' = (v')^2 + w'v' = (v')^2 + v'w' = v' \circ (v' + w') = v' \circ u.$$

Ainsi v' commute avec u. Comme v est un polynôme en u ($v = Q(u)$), v' commute aussi avec v :

$$v \circ v' = Q(u) \circ v' = v' \circ Q(u) = v' \circ v.$$

Les endomorphismes v et v' sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. D'après le résultat fondamental de la **diagonalisation simultanée**, il existe une base commune de codiagonalisation. Leur différence $v - v'$ est donc également diagonalisable dans cette base.

b **Montrons que $w' - w$ est nilpotent.**
Remarquons d'abord que de la relation $u = v + w = v' + w'$, on tire l'égalité :

$$v - v' = w' - w.$$

Montrons que w et w' commutent. Comme v' et w' commutent avec u, et que $w = R(u)$ est un polynôme en u, w commute avec v' et w'. De $w' \circ w = w \circ w'$, les endomorphismes nilpotents w' et $-w$ commutent.

D'après la formule du binôme de Newton (applicable car w' et $-w$ commutent) : Soit p l'indice de nilpotence de w' et q l'indice de nilpotence de w (soit $(w')^p = 0$ et $w^q = 0$). Pour $N = p + q$:

$$(w' - w)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (w')^k (-w)^{N-k}.$$

Pour chaque terme de la somme :

- Si $k \geq p$, alors $(w')^k = 0$, donc le terme est nul.
- Si $k < p$, alors $N - k = p + q - k > q$, donc $(-w)^{N-k} = 0$, et le terme est nul.

Tous les termes de la somme sont nuls, donc $(w' - w)^N = 0$. L'endomorphisme $w' - w$ est donc nilpotent.

c **Déduisons que $v = v'$ et $w = w'$. Autrement dit : la décomposition de Dunford est unique.**

Posons $f = v - v' = w' - w$. D'après la question **4.a**, f est diagonalisable. D'après la question **4.b**, f est nilpotent.

Or, le seul endomorphisme à la fois diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul. En effet, puisque f est diagonalisable, toutes ses valeurs propres sont sur sa diagonale dans une base de diagonalisation. Puisque f est nilpotent, son unique valeur propre est 0. Sa matrice dans une base de diagonalisation est donc la matrice nulle 0, d'où :

$$f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On en conclut que $v - v' = 0 \implies v = v'$ et $w' - w = 0 \implies w = w'$.

La décomposition de Dunford $u = v + w$ est donc strictement **unique**.

FiN