

DM : Algèbre Linéaire

Matrices

Samedi 17 Octobre 2026 (Durée : 1 heure)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

☞ Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on définit l'endomorphisme de E , noté $u_{i,j}$ par la relation suivante : $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$

☞ On note aussi, $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n , dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, égal à 1.

- ① Vérifier que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = E_{i,j}$
- ② en déduire que $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.
- ③ Soit $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$ fixé, calculer pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$, puis en déduire la relation

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

- ④ Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 - a Exprimer A dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.
 - b En déduire les coefficients de $AE_{k,l}$ et $E_{k,l}A$.

- ⑤ On pose $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } AM = MA, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$.
Montrer $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{A = \lambda I_n, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}\}$.

- ⑥ Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- a Calculer $\text{Tr}(AE_{k,l})$, pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$
- b En déduire que : $\text{Tr}(AM) = 0, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \implies A = 0$.

- ⑦ Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire.

- a Montrer la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \phi(E_{i,j})$, vérifie la relation suivante :

$$\phi(M) = \text{Tr}(AM), \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- b Justifier que A est la seule matrice vérifiant cette formule.
- c On suppose de plus que $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \phi(MN) = \phi(NM)$.

- ☞ Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $A = \lambda I_n$.
- ☞ En déduire que : $\phi(M) = \lambda \text{Tr}(M)$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

FiN

Corrigé

① Vérifions que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = E_{i,j}$.

Par définition, la $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur $u_{i,j}(e_k)$. Or, $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}e_i$.

☞ Si $k \neq j$, $u_{i,j}(e_k) = 0_E$, donc la $k^{\text{ième}}$ colonne est nulle.

☞ Si $k = j$, $u_{i,j}(e_j) = e_i$, donc la $j^{\text{ième}}$ colonne est formée de 0 partout sauf un 1 à la $i^{\text{ième}}$ ligne.

Cette matrice est exactement $E_{i,j}$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = E_{i,j}$.

② Déduisons que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

L'application $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\Phi(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Puisque $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forme la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2 , son image réciproque par cet isomorphisme, qui est $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, forme une base de $\mathcal{L}(E)$ de dimension n^2 .

③ Calcul de $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$ et relation $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculons :

$$(u_{i,j} \circ u_{k,l})(e_p) = u_{i,j}(\delta_{l,p}e_k) = \delta_{l,p}u_{i,j}(e_k) = \delta_{l,p}\delta_{j,k}e_i = \delta_{j,k}u_{i,l}(e_p)$$

Or deux endomorphismes qui coïncident sur une bases sont égaux, donc $(u_{i,j} \circ u_{k,l} = \delta_{j,k}u_{i,l}$

En utilisant l'isomorphisme matriciel, le produit de composition des endomorphismes correspond au produit matriciel :

$$E_{i,j}E_{k,l} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j} \circ u_{k,l}) = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

④ a

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}E_{i,j}.$$

b

$$AE_{k,l} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\delta_{j,k}E_{i,l} = \sum_{i=1}^n a_{i,k}E_{i,l}$$

De même, $E_{k,l}A = \sum_{j=1}^n a_{l,j}E_{k,j}$.

⑤ Montrons que $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Soit $A \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA$. En particulier, prenons $M = E_{k,l}$. D'après la question 4.b, $AE_{k,l} = E_{k,l}A$ se réécrit :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,k}E_{i,l} = \sum_{j=1}^n a_{l,j}E_{k,j} = \sum_{i=1}^n a_{l,i}E_{k,i}$$

Par unicité de la décomposition dans la base $(E_{i,j})$, en identifiant les coefficients, on obtient que : $a_{i,k} = 0$ pour tout $i \neq k$ et $a_{i,i} = a_{k,k}$.

A est une matrice diagonale à coefficients constants, c'est-à-dire de la forme λI_n . L'inclusion réciproque est immédiate.

⑥ a

$$\text{Tr}(AE_{k,l}) = \text{Tr}\left(\sum_{i=1}^n a_{i,k}E_{i,l}\right) = a_{l,k},$$

car $\text{Tr}(E_{i,l}) = 0$ si $i \neq l$ et $\text{Tr}(E_{i,l}) = 1$ si $i = l$.

b

Si $\text{Tr}(AM) = 0$ pour tout M , alors en particulier pour $M = E_{k,l}$, on a $a_{l,k} = 0$ pour tous l, k , donc $A = 0$.

⑦ a

Toute matrice M s'écrit : $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}E_{i,j}$, donc :

$$\phi(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}\phi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}m_{i,j} \right) \sum_{i=1}^n (AM)_{i,i} = \text{Tr}(AM)$$

b

Si deux matrices A, B conviennent, alors $\text{Tr}((A - B)M) = 0$ pour tout M , ce qui implique $A - B = 0$ d'après la question 6.b.

c

Si $\forall M, N, \phi(MN) = \phi(NM)$. Alors $\text{Tr}(AMN) = \text{Tr}(ANM) = \text{Tr}((AN)M) = \text{Tr}(M(AN))$ pour tous M, N .
Ainsi $\text{Tr}((AM - MA)N) = 0$, pour tout N , donc $AM - MA = 0$ pour tout M , donc $A = \lambda I_n$, d'où $\phi(M) = \lambda \text{Tr}(M)$.