

DM Algèbre Générale

Permutations & Matrices irréductibles (CCP 2000)

Préambule

Dans ce problème, on se propose d'étudier des familles de matrices que l'on rencontre lors de la résolution numérique de problèmes relatifs à des équations aux dérivées partielles de type elliptique par des méthodes de différences finies.

Matrices irréductibles - Matrices à diagonales faiblement ou fortement dominantes.

Notations :

Dans tout le problème, on suppose que N est un entier supérieur ou égal à 2.

$\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles à N lignes et N colonnes, $\mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à N lignes et P colonnes.

I_N est la matrice unité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques à N lignes et N colonnes. Si $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $(A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A)$.

Si A appartient à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ on pourra écrire $A = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, N$.

a_{ij} étant l'élément de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de A .

$(u, v) \mapsto (u | v)_N$ de $(\mathbb{R}^N)^2$ dans $\mathbb{R}$ désigne le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^N$. On identifiera $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ et pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ on écrira par exemple $(Av | v)_N$ le produit scalaire des éléments de $\mathbb{R}^N$ correspondants : on a donc, en raison de l'identification $(Av | v)_N = {}^t v A v$.

W_N est l'ensemble des N premiers entiers strictement positifs.

Rappel : une matrice réelle symétrique est dite positive (définie positive) si ses valeurs propres sont positives (strictement positives).

Tournez la page S.V.P.

Définition 1 :

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$. On appellera matrice de permutation P_σ associée à σ , la matrice P_σ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$. Alors $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Définition 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ est irréductible si pour tout couple (S, T) de parties de W_N telles que $S \cap T = \emptyset$ et $S \cup T = W_N$, il existe un élément $a_{ij} \neq 0$ avec $i \in S$ et $j \in T$.

Dans le cas contraire on dira que A est réductible.

Définition 3 :

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ $A = (a_{ij})$ est à diagonale faiblement dominante si :

$$\left| \begin{array}{l} 1) \text{ pour tout indice } i \in W_N, |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \\ 2) \text{ pour au moins un indice } i \in W_N, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \end{array} \right|$$

Définition 4 :

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est à diagonale fortement dominante si, pour tout indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$

Première partie**Question 1-1**

a) Soient σ et σ' deux permutations de l'ensemble W_N .

a.1) Montrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$.

a.2) Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

a.3) Montrer que $P_\sigma^{-1} = {}^t P_\sigma$.

3b) Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $P_\sigma \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice associée à la permutation σ . On définit $B = P_\sigma^{-1} A P_\sigma = (b_{ij})$. Exprimer b_{ij} à l'aide de σ .

c) Montrer que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de matrice de permutation P_σ telle que $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ soit de la forme :

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$$

où F et H sont des matrices appartenant respectivement à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{N-p}(\mathbb{R})$ et O une matrice dont tous les éléments sont nuls.

Question 1-2

a) Soit $C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $C = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$ où F et H appartiennent respectivement à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{N-p}(\mathbb{R})$ et sont inversibles. Résoudre le système linéaire $CX = U$ où $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est la matrice des inconnues et $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est donnée. On utilisera pour cela une décomposition convenable de X et de U en blocs $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

b) On suppose que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est réductible. Proposer une méthode de résolution du système $AX = U$.

Question 1-3

On veut montrer que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement si la propriété (P) suivante est vérifiée :

(P) pour tout couple (i, j) d'indices distincts de W_N , $a_{ij} \neq 0$ ou alors il existe un entier s et des indices $i_1, i_2, \dots, i_s$ tels que le produit $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j}$ soit non nul.

a) Etablir que la condition est suffisante.

b) On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible. Pour chaque indice $i \in W_N$, on définit X_i comme l'ensemble des indices j de W_N tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) j \neq i \\ 2) \text{ soit } a_{ij} \neq 0 \\ \quad \text{soit il existe } i_1, \dots, i_s \text{ tels que le produit } a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j} \text{ soit différent de 0.} \end{array} \right.$$

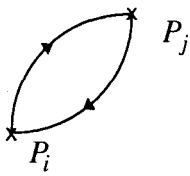
Montrer que $X_i = W_N \setminus \{i\}$ et en déduire que la condition est nécessaire.

Tournez la page S.V.P.

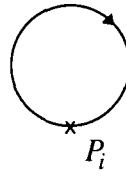
Question 1-4

Le concept d'irréductibilité peut être illustré graphiquement.

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ et $\{P_i \mid i \in W\}$ un ensemble de N points distincts du plan. Pour chaque couple $(i, j) \in (W_N)^2$ tel que $a_{ij} \neq 0$, on trace une flèche allant du point P_i vers le point P_j . Si a_{ij} et a_{ji} sont non nuls, il y aura une flèche du point P_i vers le point P_j et une autre de P_j vers P_i . Si $a_{ii} \neq 0$ on pourra tracer une boucle allant de P_i vers lui-même.



$a_{ij} \neq 0$ et $a_{ji} \neq 0$



$a_{ii} \neq 0$

On associe ainsi à chaque matrice ce que l'on appelle un graphe orienté.

En étudiant les graphes associés aux deux matrices suivantes :

$$A_1 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donner une interprétation graphique du caractère réductible ou irréductible de chacune d'elles.

Deuxième partie

Question 2-1

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ à diagonale fortement dominante ; soit $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU = 0$

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$; soit i , un indice tel que $|u_i| = \max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$. En considérant la i -ème ligne du produit AU montrer que l'on a nécessairement $U = 0$. Que peut-on en déduire pour $\det A$?

Question 2-2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible et à diagonale faiblement dominante.

a) Montrer qu'alors pour tout indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| > 0$.

- b) Montrer que $\det A \neq 0$. Pour cela, on raisonnera comme dans la question 2-1 et on montrera d'abord que si $AU = 0$, tous les éléments de la matrice colonne U sont nécessairement égaux en valeur absolue.

Question 2-3

- a) Si $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une matrice dont les éléments diagonaux sont ≥ 0 et si, de plus, elle est à diagonale faiblement dominante, montrer que toutes les valeurs propres de A sont ≥ 0 .
- b) Si, de plus, A est irréductible ou inversible, on montrera que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Troisième partie

Définition 5 :

Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une L -matrice si :

- 1) pour tout indice $i \in W_N$, on a $a_{ii} > 0$
- 2) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$

Définition 6 :

Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une S -matrice si :

- 1) A est définie positive,
- 2) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$

Définition 7 :

Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une M -matrice si :

- 1) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$,
- 2) A est inversible,
- 3) tous les éléments de A^{-1} sont ≥ 0 .

Question 3-1

- a) Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ définie positive, montrer qu'alors $a_{ii} > 0$ pour tout indice $i \in W_N$. En déduire que $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une S -matrice si et seulement si A est une L -matrice définie positive.
- b) Montrer que toute M -matrice est une L -matrice.

c) Montrer que si $A \in S_N(\mathbb{R})$ est une L -matrice

1) irréductible,

2) à diagonale faiblement dominante,

alors A est une S -matrice.

Question 3-2

Le spectre de Q est, par définition, l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes de Q .
 $Sp(Q) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \det(Q - \lambda I_N) = 0\}$. On appelle alors rayon spectral de Q , $S(Q) = \max_{\lambda \in Sp(Q)} |\lambda|$.

a) Si $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, montrer que la série $\sum_{k \geq 0} Q^k$ est convergente si et seulement si $S(Q) < 1$.

On admettra l'équivalence : $Q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow S(Q) < 1$.

Dans toute la suite de la question 3-2, on considère une L -matrice A d'ordre N et D la matrice diagonale ayant la même diagonale que A , donc définie par :

Pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $d_{ij} = 0$
 Pour tout indice $i \in W_N$, on a $d_{ii} = a_{ii}$

Soit $C = (c_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, telle que $A = D - C$ et soit $B = D^{-1}C$ (on justifiera l'existence de D^{-1}).

On suppose que $S(B) < 1$.

b) Justifier le fait que $I_N - B$ est inversible et montrer que tous les éléments de $(I_N - B)^{-1}$ sont positifs ou nuls.

c) Montrer que A est inversible et que A est une M -matrice.

Question 3-3

Si D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, on définit $D^{1/2}$ et $D^{-1/2}$ matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont respectivement $\sqrt{d_{ii}}$ et $\frac{1}{\sqrt{d_{ii}}}$ pour tout indice $i \in W_N$.

Soit A une M -matrice.

On définit D , C , B comme à la question précédente et $\hat{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ par $\hat{A} = D^{-1/2} A D^{-1/2} = I_N - D^{-1/2} C D^{-1/2}$ et $\hat{B} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ par $\hat{B} = D^{1/2} B D^{-1/2}$.

a) Montrer que $\hat{A}$ est une M -matrice et que :

$$\left(\hat{A}\right)^{-1} = \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1} = I_N + \hat{B} + \left(\hat{B}\right)^2 + \dots + \left(\hat{B}\right)^m + \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1} \left(\hat{B}\right)^{m+1} \quad \text{pour tout entier } m \text{ strictement positif.}$$

b) Soit $G_m \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par : $G_m = I_N + \hat{B} + \dots + \left(\hat{B}\right)^m$. Montrer que tous les éléments de G_m sont positifs et majorés indépendamment de m .

c) En déduire que $S(B) < 1$.

Question 3-4

Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ une S -matrice.

On utilise les mêmes notations qu'en 3-2 et 3-3.

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = (I_N - B)^{-1} D^{-1}$.

b) On veut maintenant montrer que $S(B) < 1$ ce qui suffira pour établir que toute S -matrice est une M -matrice.

b1) Montrer que $\hat{A}$ est définie positive.

b2) En supposant $S(B) \geq 1$, montrer que l'on est conduit à une contradiction et que donc toute S -matrice est une M -matrice. On admettra que si $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ a tous ses éléments positifs ou nuls, alors, il existe $\mu \in Sp(Q)$ tel que $\mu = S(Q)$.

Fin de l'énoncé.

C.C.P. MP Math 2 2000

Partie 1 - Matrices réductibles ou irréductibles

Question 1-1 -

a.1) Pour un vecteur de la base canonique : $(e_1, \dots, e_N)$ de $\mathbb{R}^N$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad 1 \leq i \leq N \quad P_\sigma \times P_{\sigma'}(e_i) = P_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = e_{\sigma \circ \sigma'(i)} \quad \text{donc} \quad \boxed{P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}}$$

a.2) Pour $\sigma' = \sigma^{-1}$ dans la relation précédente, puisque $P_{Id_{W_N}} = I_N$ on a : $\boxed{P_\sigma \times P_{\sigma^{-1}} = I_N}$

a.3) L'image de la base canonique par l'endomorphisme associé à P_σ est une base constituée des mêmes vecteurs dans un autre ordre (permutés par σ).

C'est donc encore une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.

$$\boxed{P_\sigma \text{ matrice de changement de bases orthonormales est donc orthogonale}}$$

Autre méthode :

$$\text{Calculons } ({}^t P_\sigma \times P_\sigma)_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq N} ({}^t P_\sigma)_{ik} (P_\sigma)_{kj} = \sum_{1 \leq k \leq N} (P_\sigma)_{ki} (P_\sigma)_{kj} = \sum_{1 \leq k \leq N} \delta_{k \sigma(i)} \delta_{k \sigma(j)}$$

Si $k \neq \sigma(i)$ ou $k \neq \sigma(j)$ le terme qu'on somme est nul. Il est donc nul pour $i \neq j$ (σ injective)

$$\text{Pour } i = j \text{ il n'y a qu'un seul terme non nul dans la somme, qui vaut } 1. \quad \boxed{{}^t P_\sigma \times P_\sigma = I_N}$$

Une matrice de permutation est donc **orthogonale**.

b) On peut comme ci-dessus, calculer b_{ij} dans le produit des trois matrices.

Autre rédaction :

Appellons E_{ij} la matrice carrée élémentaire, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Alors $\boxed{P_\sigma = \sum_{1 \leq j \leq N} E_{\sigma(j)j}}$

Avec les **opérations élémentaires** sur les lignes et les colonnes d'une matrice carrée M :

$$M \times E_{ij} \text{ correspond à } C_i \rightarrow C_j \quad \text{et} \quad E_{ij} \times M \text{ correspond à } L_j \rightarrow L_i$$

$$\text{Puisque : } P_{\sigma^{-1}} = \sum_{1 \leq j \leq N} E_{\sigma^{-1}(j)j} = \sum_{1 \leq i \leq N} E_{i\sigma(i)} \quad \text{en posant } j = \sigma(i) \text{ donc } i = \sigma^{-1}(j)$$

on a dans $B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma$ la superposition des opérations élémentaires :

$$\begin{array}{l} \text{Pour } j \text{ de } 1 \text{ à } N \quad C_{\sigma(j)} \rightarrow C_j \\ \text{Pour } i \text{ de } 1 \text{ à } N \quad L_{\sigma(i)} \rightarrow L_i \end{array} \quad \text{donc} \quad \boxed{\forall (i, j) \in (W_N)^2 \quad b_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}}$$

c) Si A est réductible :

il existe (S, T) de parties **non vides** de W_N formant une partition, telles que $\begin{cases} \forall s \in S & a_{st} = 0 \\ \forall t \in T \end{cases}$

Considérons S et T ordonnées, et définissons une permutation σ envoyant chaque élément de $\{1, \dots, N\}$ sur l'élément de même rang de (S, T) pris successivement dans l'ordre.

Si $p = \text{card}(S)$ $\sigma(\{1, \dots, p\}) = S$ et $\sigma(\{p+1, \dots, N\}) = T$

$$\text{Alors, dans } B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma \quad \begin{cases} j \geq p+1 & \text{alors } \sigma(j) \in T \\ i \leq p & \text{alors } \sigma(i) \in S \end{cases} \quad \text{et } b_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)} = a_{st} = 0$$

$$\text{donc } B \text{ est décomposable en blocs : } B = \begin{pmatrix} F & 0_{p \times N-p} \\ G & H \end{pmatrix}$$

Réciproquement : si B a la forme indiquée et qu'on pose $S = \sigma(\{1, \dots, p\})$ et $T = \sigma(\{p+1, \dots, N\})$,

il constituent une partition de W_N et $\begin{cases} \forall s \in S & a_{st} = a_{\sigma(i)\sigma(j)} = b_{ij} = 0 \\ \forall t \in T \end{cases}$ car $i \leq p$ et $j \geq p+1$

Question 1-2 : Considérons $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{N-P}$

a) Ce qui revient à décomposer les matrices colonnes en blocs $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ où $U_1 \in \mathbb{R}^P$ et $U_2 \in \mathbb{R}^{N-P}$

$$\text{Alors } (C.X = U) \iff (F.X_1 = U_1 \text{ et } H.X_2 = U_2 - G.X_1) \iff \boxed{\begin{pmatrix} X_1 = F^{-1}.U_1 \\ X_2 = H^{-1}.[U_2 - G.X_1] \end{pmatrix}}$$

b) Si A est réductible et inversible, $\det((P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma) = \det(A)$

donc B décomposable en blocs a des blocs inversibles sur la diagonale.

On peut donc résoudre le système en résolvant deux systèmes **plus petits** en taille, on détermine S et T puis F et H et leurs inverses.

Note :

$\det(P_\sigma) = \pm 1$ puisqu'elle est orthogonale, on peut même assurer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$
où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ , puisque le déterminant est une forme antisymétrique,
et qu'il vaut 1 sur la base canonique

Question 1-3 : On va montrer que A est réductible si et seulement si $\text{non}(P)$ est vraie

- a) Si A est réductible : il existe (S, T) partition de W_N , telle que $\begin{cases} \forall i \in S \\ \forall j \in T \end{cases} a_{ij} = 0$

Il existe donc $(i, j) \in W_N^2$ (on le prend dans $S \times T$ qui est non vide car S et T non vides)

tel que $\begin{cases} a_{ij} = 0 \\ \text{et quelque soit } s \in W_N \text{ et la suite d'indices } i_1, i_2, \dots, i_s \text{ le produit } a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s j} = 0 \end{cases}$

En effet si le produit est non nul, chacun des termes est non nul donc successivement :

avec $i \in S$ et $a_{ii_1} \neq 0$ $i_1 \notin T$ donc $i_1 \in S$,
puis $i_1 \in S$ et $a_{i_1 i_2} \neq 0$ $i_2 \notin T$ donc $i_2 \in S$, etc jusqu'à $j \in S$, or $j \in T$: **absurde**.

D'où $\text{non}(P)$ est vraie : la condition (P) est suffisante pour assurer A irréductible.

- b) Si A est irréductible, suivant l'énoncé posons, pour i momentanément fixé

$$X_i = \left\{ j \in W_N \quad j \neq i \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{ij} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \exists s \geq 1 \\ \exists (i_1, i_2, \dots, i_s), a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s j} \neq 0 \end{cases} \right\}$$

Lemme : Montrons que si pour un i fixé $\forall j \neq i \quad a_{ij} = 0$ alors A est réductible

Si $\forall j \neq i \quad a_{ij} = 0$ alors la $i^{\text{ème}}$ ligne de A vaut : $L_i = (0 \dots 0 \ a_{ii} \ 0 \dots 0)$

avec $\sigma = \tau_{1i}$ transposition échangeant 1 et i

on a $B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma = \begin{pmatrix} a_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ G & & H & \end{pmatrix}$ donc A est **réductible**.

Donc **par l'absurde** : $X_i \neq \emptyset$ Enfin i est dans le complémentaire de X_i $i \notin X_i$

Supposons $X_i \neq W_N \setminus \{i\}$ et considérons $S = X_i \cup \{i\}$ et $T = W_N \setminus S$

C'est une partition de W_N constituée de parties non vides.

Pour $\begin{cases} k \in S = X_i \cup \{i\} \\ l \in T \end{cases}$ supposons $a_{kl} \neq 0$

1^{er} cas : $k = i$ alors $(a_{il} \neq 0) \implies (l \in X_i)$

2^{ème} cas : $k \in X_i$ on a deux sous-cas :

$\begin{cases} \text{si } a_{ik} \neq 0 \text{ alors } a_{ik} a_{kl} \neq 0 \text{ donc } l \in X_i \\ \text{si } \exists (i_1, i_2, \dots, i_s) \ a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s k} \neq 0 \text{ alors } a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s k} a_{kl} \neq 0 \text{ donc } l \in X_i \end{cases}$

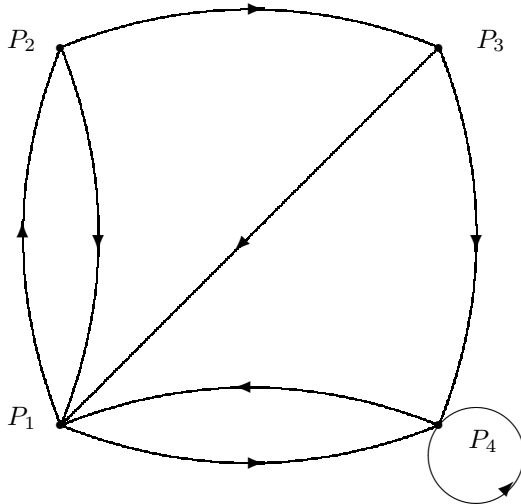
La conséquence est dans tous les cas contraire à l'hypothèse, donc $\begin{cases} \forall k \in S \\ \forall l \in T \end{cases} a_{kl} = 0$

Mais alors A serait **réductible**, ce qui n'est pas. Donc : $\forall i \in W_N \quad X_i = W_N \setminus \{i\}$

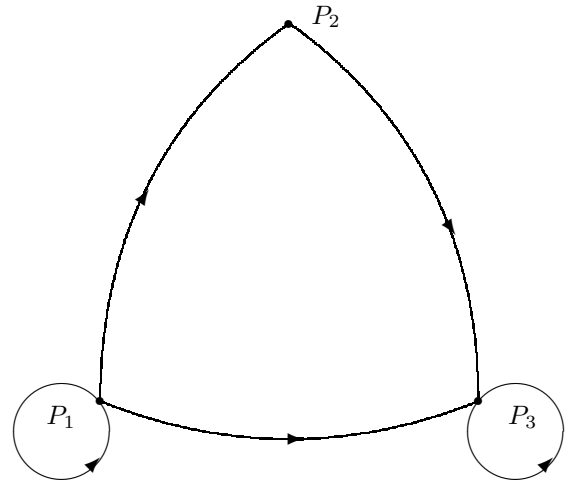
Ainsi (P) est vraie, car pour $j \neq i \quad j \in X_i$

Question 1-4 : La traduction graphique de (P) est : pour tout couple de points **distincts** (P_i, P_j)

- il existe une flèche joignant P_i à P_j
- ou il existe un chemin orienté, succession de flèches allant de P_i à P_j en passant par $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_s}$



Graphe de la matrice A_1



Graphe de la matrice A_2

On constate ainsi que A_1 est irréductible et A_2 est réductible.

Note : les bouclettes correspondant à $a_{ii} \neq 0$ sont ici sans signification.

Partie 2 - Matrices à diagonales dominantes

Question 2-1 : Un théorème d'Hadamard

Supposons $U \neq 0$ et i_0 un entier tel que : $|u_{i_0}| = \max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$

Alors $|u_{i_0}| \neq 0$, et avec la $i_0^{ème}$ composante de $A.U = 0$ on a : $\sum_{1 \leq j \leq N} a_{i_0 j} u_j = 0$

$$\text{d'où l'on tire : } a_{i_0 i_0} u_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j$$

$$\text{et donc : } |a_{i_0 i_0}| = \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|$$

Ce qui est exclu pour A à diagonale **strictement dominante**.

Ainsi $(A.U = 0) \implies (U = 0)$ donc $\boxed{Ker(A) = \{0\}}$

Un endomorphisme **injectif** en dimension finie est bijectif d'où $\boxed{\det(A) \neq 0}$

Question 2-2 :

a) Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ on a $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ (diagonale faiblement dominante)

Donc $(a_{ii} = 0) \implies (\forall j \neq i \quad a_{ij} = 0)$ ce qui (voir le Lemme question 1-3 b)) entraine A réductible.

Ainsi : $\boxed{\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad |a_{ii}| > 0}$

b) Avec les mêmes notations qu'en 2-1, $\boxed{\text{supposant } U \neq 0}$

Puisque la diagonale est faiblement dominante :

$$\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \leq |a_{i_0 i_0}| = \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \left[1 - \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \right] \leq 0}$$

Or tous ces termes sont positifs ou nuls. Il sont donc **tous nuls**.

Soit $S = \{i \in \{1, \dots, N\} \mid |u_i| = |u_{i_0}|\}$ et $T = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid |u_j| < |u_{i_0}|\}$ son complémentaire.

$$\boxed{\forall (i, j) \in S \times T} \quad \text{on retrouve} \quad \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \leq |a_{ii}| = \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{k \neq i} a_{ik} u_k \right| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \frac{|u_k|}{|u_{i_0}|}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \left[1 - \frac{|u_k|}{|u_i|} \right] \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \neq i \quad |a_{ik}| \left[1 - \frac{|u_k|}{|u_i|} \right] = 0 \quad \text{pour } j \in T \quad \text{alors} \quad \boxed{a_{ij} = 0}$$

Si S et T sont non vides, cela entraine A réductible. Ce qu'on a exclu.

Mais $S \neq \emptyset$ car $i_0 \in S$ donc $T = \emptyset$ et $\boxed{S = \{i \in \{1, \dots, N\} \mid |u_i| = |u_{i_0}|\} = \{1, \dots, N\}}$

Tous les coefficients de la colonne U sont égaux en valeurs absolues.

Enfin pour l'indice i tel que $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

$$\left. \begin{aligned} \text{on retrouve} \quad |a_{ii}| &= \frac{1}{|u_{i_0}|} \left| \sum_{k \neq i} a_{ik} u_k \right| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \frac{|u_k|}{|u_{i_0}|} = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \end{aligned} \right\} \text{ce qui est impossible}$$

Donc $\boxed{U = 0}$ et comme précédemment A est injective et $\boxed{\det(A) \neq 0}$

Question 2-3 : Cas particuliers d'un résultat de Gerschgorin

a) A **symétrique et réelle** est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ par matrice diagonalisante orthogonale.

Son polynôme caractéristique admet N racines réelles comptées avec leurs multiplicités.

Soit $\lambda \in Sp(A) \subset \mathbb{R}$, $U \neq 0$ un vecteur propre associé et i_0 tel que : $|u_{i_0}| = \max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$

$$\text{on retrouve : } (a_{i_0 i_0} - \lambda) u_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} u_j \quad \text{d'où :} \quad \boxed{|a_{i_0 i_0} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|}$$

Or par faible dominance : $\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \leq |a_{i_0 i_0}| = a_{i_0 i_0}$ qui est un réel positif

$$\text{donc } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (|a_{i_0 i_0} - \lambda| \leq a_{i_0 i_0}) \implies \boxed{(\lambda \in [0, 2 a_{i_0 i_0}])}$$

Toutes les valeurs propres sont donc des réels positifs : A est **positive**.

b) On a vu : (irréductible et à diagonale faiblement dominante) $\implies$ (inversible)

Si A est inversible : $\det(A) \neq 0$ et c'est le produit des valeurs propres : elles sont donc non nulles.

$$\left. \begin{aligned} A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall i \in W_N \quad a_{ii} \geq 0, \text{ à diagonale} \\ \text{faiblement dominante et irréductible ou inversible} \end{aligned} \right\} \implies \boxed{A \text{ symétrique définie positive}}$$

Question 3-1 :

- a) Pour $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et **définie positive**, $\forall v \neq 0 \quad (Av | v) > 0$

Résultat du cours :

$A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}^N$ par changement de bases orthonormales pour le produit scalaire usuel, passant de la base canonique à une base $(u_1, \dots, u_N)$ de vecteurs propres.

Pour A de plus définie positive, les valeurs propres $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N}$ sont strictement positives.

Pour tout vecteur $v \neq 0$, en le décomposant sur $(u_1, \dots, u_N)$: $v = \sum_{1 \leq j \leq N} x_j u_j$

$$\text{ainsi } Av = \sum_{1 \leq j \leq N} x_j Au_j = \sum_{1 \leq j \leq N} x_j \lambda_j u_j \text{ et donc } (Av | v) = \sum_{1 \leq j \leq N} \lambda_j (u_j)^2$$

Pour $v = e_i$ de la base canonique : Ae_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A et donc

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (Ae_i | e_i) = a_{ii} > 0$$

La propriété (2) se conservant : $(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \iff (A \text{ est une } L\text{-matrice, définie positive})$

- b) Si A est une M -matrice, alors $\forall (i, j) \in W_N^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$ donc (2)

Notons $R = A^{-1}$ alors $\forall (i, j) \quad r_{ij} \geq 0$ et $A.R = I_N$

d'où $(A.R)_{ii} = 1 = \sum_{1 \leq j \leq N} a_{ij} r_{ji}$ ainsi : $a_{ii} r_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} a_{ij} r_{ji} \geq 1$ ($a_{ij} \leq 0 \quad r_{ij} \geq 0$)

donc $a_{ii} r_{ii} \geq 1$ ce qui entraîne $a_{ii} > 0$ d'où la propriété (1) : $\forall i \in W_N \quad a_{ii} > 0$

$$(A \text{ est une } M\text{-matrice}) \iff (A \text{ est une } L\text{-matrice})$$

- c) Puisqu'on a (2), il suffit de montrer que A est définie positive.

On applique la **question 2-3** : une L -matrice à diagonale faiblement dominante a des valeurs propres positives, et si elle est irréductible, strictement positives.

Question 3-2 Par convention, pour toute matrice carrée : $A^0 = I_N$

- a) On admet : $(S(Q) < 1) \iff (Q^n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty)$

Par commutabilité de I_N et Q on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[\sum_{0 \leq k \leq n} Q^k \right] (I_N - Q) = I_N - Q^{n+1}$

et $S(Q) < 1$ donc $1 \notin Sp(Q)$ ainsi $\det(I_N - Q) \neq 0$ et $\sum_{0 \leq k \leq n} Q^k = (I_N - Q^{n+1}) (I_N - Q)^{-1}$

$$\text{d'où : } (S(Q) < 1) \implies \left(\text{la série } \sum Q^k \text{ est convergente de somme totale } (I_N - Q)^{-1} \right)$$

Réciproquement : si la série de matrices converge, la suite associée tend vers 0 (condition usuelle de convergence avec Q^n différence de deux sommes partielles) donc $S(Q) < 1$

D'où l'équivalence.

- b) A est une L -matrice, donc $\forall i \in W_N \quad a_{ii} > 0$ et $\det(D) = \prod_{0 \leq i \leq n} a_{ii} > 0$

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{ii}}\right) \quad \text{Si on pose } B = D^{-1}.C \text{ avec } A = D - C \text{ alors } A = D.(I_N - B)$$

On suppose : $S(B) < 1$, avec la question précédente : $\left[\sum_{0 \leq k} B^k \right] (I_N - B) = I_N$

$$\text{et } (I_N - B) \text{ est inversible, avec } (I_N - B)^{-1} = \sum_{0 \leq k} B^k$$

B est à coefficients positifs, comme D^{-1} et C , donc $\forall k \in \mathbb{N} \quad B^k$ est à coefficients positifs, par somme et passage à la limite composante par composante :

$$\text{tous les éléments de } (I_N - B)^{-1} \text{ sont positifs ou nuls}$$

- c) $A = D.(I_N - B)$ est donc **inversible** et $A^{-1} = (I_N - B)^{-1} D^{-1}$ a donc tous ses éléments ≥ 0

$$(A \text{ est une } L\text{-matrice et } S(B) < 1) \implies (A \text{ est une } M\text{-matrice})$$

Question 3-3 :

- a) $\det(D) = \prod_{0 \leq i \leq n} a_{ii} > 0$ et $\det(D^{-\frac{1}{2}}) = \prod_{0 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ donc A et $D^{-\frac{1}{2}}$ sont inversibles : $\hat{A}$ est

inversible et $(\hat{A})^{-1} = D^{\frac{1}{2}}.A^{-1}.D^{\frac{1}{2}}$ est à coefficients **positifs ou nuls**.

$\hat{A}_{ij}$ peut se calculer avec le produit des trois matrices, dont deux diagonales,

ou avec $\hat{A}_{ij} = (\hat{A} e_j | e_i) = (A D^{-\frac{1}{2}} e_j | D^{-\frac{1}{2}} e_i)$ puisque la matrice $D^{-\frac{1}{2}}$ est symétrique dans une base orthonormale, l'endomorphisme est autoadjoint.

$$\forall (i, j) \quad \hat{A}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{1}{\sqrt{a_{jj}}} a_{ij} \quad \text{en particulier} \quad \hat{A}_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad (i \neq j) \implies \hat{A}_{ij} < 0$$

Donc : $\hat{A}$ est une M -matrice et la partie diagonale de $\hat{A}$ est $\hat{D} = I_N$

De plus : $\hat{A} = D^{-\frac{1}{2}} \cdot A \cdot D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} \cdot [D \cdot (I_N - B)] \cdot D^{-\frac{1}{2}} = I_N - D^{\frac{1}{2}} \cdot B \cdot D^{-\frac{1}{2}}$

la décomposition $\hat{A} = I_N - \hat{B}$ est la décomposition du **3-2 a)** appliquée à $\hat{A}$

On retrouve que : $\forall m \in \mathbb{N} \quad I_N = (I_N - \hat{B}) \left[\sum_{0 \leq k \leq m} \hat{B}^k \right] + \hat{B}^{m+1}$

et on peut multiplier à gauche par $(I_N - \hat{B})^{-1}$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (\hat{A})^{-1} = (I_N - \hat{B})^{-1} = \left[\sum_{0 \leq k \leq m} \hat{B}^k \right] + (I_N - \hat{B})^{-1} \cdot \hat{B}^{m+1}$$

b) $\hat{B} = D^{\frac{1}{2}} \cdot B \cdot D^{-\frac{1}{2}}$ produit de matrices à coefficients positifs, est aussi à coefficients positifs.

rappel : $(i \neq j) \implies (a_{ij} < 0)$ donc $\forall (i, j) \quad c_{ij} \geq 0$ et $b_{ij} \geq 0$

De même ses puissances successives et leur somme : tous les éléments de G_m sont ≥ 0

De plus : $G_m = (\hat{A})^{-1} - (\hat{A})^{-1} \cdot \hat{B}^{m+1}$ et les coefficients de cette dernière étant positifs,

on peut noter : $G_m \ll (\hat{A})^{-1}$ au sens où coefficient par coefficient : $[G_m]_{ij} \leq [(\hat{A})^{-1}]_{ij}$

c) Pour tout (i, j) fixé, on a donc une suite de réels croissante et majorée : elle converge dans $\mathbb{R}$.

La suite $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est convergente, la série $\sum \hat{B}^k$ est convergente, donc avec **3-2 a)** $S(\hat{B}) < 1$

Mais B et $\hat{B}$ sont **semblables** (avec la matrice de passage $D^{\frac{1}{2}}$) donc ont même spectre : $S(B) < 1$

Avec **3-1 b)**, **3-2 c)** et **3-3 c)** : $(A \text{ est une } L\text{-matrice et } S(B) < 1) \iff (A \text{ est une } M\text{-matrice})$

Question 3-4 :

a) Si A est une S -matrice, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, à valeurs propres strictement positives, donc $\det(A) > 0$ (produit des valeurs propres du polynôme caractéristique scindé)

Avec **3-1 a)** : A est une L -matrice, donc $\forall i \in W_N \quad a_{ii} > 0$ et $\det(D) = \prod_{0 \leq i \leq n} a_{ii} > 0$

Puisque $A = D \cdot (I_N - B)$ on obtient : $(I_N - B)$ inversible, et $A^{-1} = (I_N - B)^{-1} \cdot D^{-1}$

b1) $\hat{A}$ et A sont **congruents** donc représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes : elles sont simultanément définies positives.

On peut détailler, mais c'est superflu :

$\hat{A}$ est dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, donc a N valeurs propres réelles, comptées avec leurs multiplicités.

Soit $v \neq 0$ un vecteur propre associé à λ :

$$(\hat{A} v = \lambda v) \implies (A \cdot D^{-\frac{1}{2}} v = \lambda D^{\frac{1}{2}} v) \implies (A w = \lambda D w \text{ en posant } w = D^{\frac{1}{2}} v \neq 0)$$

mais pour $w \neq 0 \quad (A w | w) > 0$ donc $(\lambda D w | w) = \lambda \left[\sum_{1 \leq i \leq N} a_{ii} w_i^2 \right] > 0$

ainsi toutes les valeurs propres λ de $\hat{A}$ sont strictement positives

b2) On admet que si $Q \geq 0$ alors il existe $\mu \in Sp(Q)$ tel que $\mu = S(Q)$. C'est donc le cas pour B : il existe $\mu \geq 1$ valeur propre de B donc de $\hat{B}$ (semblables)

Mais $\hat{A} = I_N - \hat{B}$ donc $\lambda = (1 - \mu) \leq 0$ est une valeur propre de $\hat{A}$. Ce qui contredit **3-4 b1)**.

Donc $S(B) < 1$ et avec **3-1 a)** :

$(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \implies (A \text{ est une } L\text{-matrice, définie positive et } S(B) < 1)$

D'où, avec **3-2 c)** : $(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \implies (A \text{ est une } M\text{-matrice})$.