

DM : Algèbre Linéaire

Ev & App.Linéaires

Dimanche 11 Octobre 2026 (Durée : 2 heures)

Remarques :

Le devoir est composé d'un problème en de deux parties largement dépendantes. Il traite les notions d'images et noyaux itérés en dimension finie.

- La première partie de niveau CNC-CCINP, s'intéresse aux propriétés générales des noyaux et images itérés.
- La deuxième partie de niveau Mines, mais détaillée, s'intéresse aux écarts entre les dimensions des noyaux et images itérés.

Dans tout le problème :

- E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\dim(E) = n \geq 2$.
- Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u_k = \dim \ker(f^k)$ et $v_k = \dim \operatorname{Im}(f^k)$.

Partie A : Propriétés Générales

① Formules simples et utiles :

Soit f, g deux endomorphismes de E . Montrer que :

- $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
- $\ker f \subset \ker g \circ f$.
- $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im}(f) \subset \ker g$.

② Étude des inclusions et de la stationnarité. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$
- Justifier qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}$, appelé **indice de stagnation** (ou indice de f), tel que : $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$
- Montrer que $p \leq n$.
- Démontrer que pour tout $k \geq p$: $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^k) = \operatorname{Im}(f^p)$

③ Décomposition en somme directe.

- Montrer que $\ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p) = \{0_E\}$.
- En déduire que : $E = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p)$

④ Propriétés des restrictions.

On pose $F = \ker(f^p)$ et $G = \operatorname{Im}(f^p)$.

- Montrer que F et G sont stables par f .
- Montrer que $f|_F \in \mathcal{L}(F)$ est nilpotent d'indice p .
- Montrer que $f|_G \in \mathcal{L}(G)$ est un automorphisme de G .

Partie B : Étude des écarts des dimension

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

① Étude des sauts de dimension des noyaux.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = u_{k+1} - u_k = \dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k)$.

a Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application f induit un morphisme d'espaces vectoriels :
 $\tilde{f} : \ker(f^{k+2}) \longrightarrow \ker(f^{k+1})$

b Déterminer le noyau $\ker(\tilde{f})$ ainsi que l'image $\text{Im}(\tilde{f})$.

② **a** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de F_k sev de E tq. $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^k) \oplus F_k$.

b On pose $p = p_{F_k | \ker(f^k)}$.
Justifier que l'application $g : \begin{matrix} F_{k+1} & \rightarrow & F_k \\ x & \mapsto & p(f(x)) \end{matrix}$ est bien définie et linéaire.

c Montrer que g est injective.

d En déduire que $\dim F_{k+1} \leq \dim F_k$.

e Conclure que : $d_{k+1} \leq d_k$

③ Conséquences sur la suite des images itérées.

a Exprimer $\dim \text{Im}(f^k) - \dim \text{Im}(f^{k+1})$ en fonction de d_k .

b En déduire que la suite $(v_k - v_{k+1})_{k \geq 0}$ est décroissante, où $v_k = \dim \text{Im}(f^k)$.

c Montrer que si $f^p = 0, f^{p-1} \neq 0$, alors : $\dim \ker(f) \geq \frac{n}{p}$

④ Interprétation géométrique.

Montrer pour tout $k \geq 1$ que : $u_{k+1} - u_k \leq u_k - u_{k-1} \iff u_{k+1} + u_{k-1} \leq 2u_k$

⑤ On suppose que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\dim \ker(f^k) = k$. Montrer que f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à n .

⑥ On suppose dans cette question que f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à n .

a Justifier que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a
 $\dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k) \neq 0$.

b En déduire que tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\dim \ker(f^k) \geq k$.

c En déduire que tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\dim \ker(f^k) = k$

⑦ Conclure une caractérisation des endomorphismes nilpotent d'indice n .

FiN

Corrigé

Partie A : Propriétés Générales

① Formules simples et utiles

- a** Montrons que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g$:
Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$. Par définition, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. En posant $x' = f(x) \in E$, on a $y = g(x')$, ce qui signifie exactement que $y \in \text{Im} g$.
Par conséquent, $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g$.
- b** Montrons que $\ker f \subset \ker(g \circ f)$:
Soit $x \in \ker f$. Par définition, on a $f(x) = 0_E$.
Appliquons l'endomorphisme g à cette égalité : $g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = 0_E$. Cela prouve que $x \in \ker(g \circ f)$, d'où l'inclusion $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
- c** Montrons l'équivalence $g \circ f = 0 \iff \text{Im} f \subset \ker g$:
- ☞ $(\Rightarrow)$ Supposons que $g \circ f = 0$ (l'endomorphisme nul).
Soit $y \in \text{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Alors $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0_E(x) = 0_E$, ce qui implique que $y \in \ker g$.
Ainsi, $\text{Im} f \subset \ker g$.
- ☜ $(\Leftarrow)$ Supposons que $\text{Im} f \subset \ker g$.
Pour tout vecteur $x \in E$, on a $f(x) \in \text{Im} f$, donc par hypothèse $f(x) \in \ker g$.
Il en résulte que $g(f(x)) = 0_E$, soit $(g \circ f)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$.
Par conséquent, $g \circ f = 0$.

② Étude des inclusions et de la stationnarité

- a** Soit $k \in \mathbb{N}$.
- ☞ Soit $x \in \ker(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0_E$. En appliquant f , on obtient $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$, ce qui signifie que $x \in \ker(f^{k+1})$. D'où l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.
- ☞ Soit $y \in \text{Im}(f^{k+1})$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$. En posant $x' = f(x) \in E$, on a $y = f^k(x')$, ce qui prouve que $y \in \text{Im}(f^k)$. D'où l'inclusion $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.
- b** Considérons la suite des dimensions $(\dim \ker(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$. C'est une suite d'entiers naturels croissante et majorée par $\dim(E) = n$. Cette suite stationne donc nécessairement : il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\dim \ker(f^{p+1}) = \dim \ker(f^p)$. Puisque $\ker(f^p) \subset \ker(f^{p+1})$ et que ces deux espaces ont la même dimension, ils sont égaux : $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.
- c** Pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ et par définition de p , $\dim \ker(f^k)$ forment une suite strictement croissante d'espaces vectoriels, en particulier : $\dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k) \geq 1$.
Ainsi $\sum_{k=0}^{p-1} 1 \leq \sum_{k=0}^{p-1} (\dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k))$, ce qui donne :
 $p \leq \dim \ker(f^p) - \dim \ker(f^0) = \dim \ker(f^p) - \dim \ker(\text{Id}_E) = \dim \ker(f^p) \leq \dim E = n$.
- d** Montrons par récurrence sur $m \geq 0$ que pour tout $k \geq p$, $\ker(f^{p+m}) = \ker(f^p)$. La propriété est vraie pour $m = 0$.
Supposons-la vraie au rang m et soit $x \in \ker(f^{p+m+1})$. Alors $f^{p+m}(f(x)) = 0_E$, ce qui implique que $f(x) \in \ker(f^{p+m}) = \ker(f^p)$. Par suite, $f^p(f(x)) = 0_E$, soit $f^{p+1}(x) = 0_E$, ce qui équivaut à $x \in \ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$. L'égalité des noyaux pour tout $k \geq p$ entraîne par le théorème du rang l'égalité des images : $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$.

③ Décomposition en somme directe

a Soit $x \in \ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p)$. Puisque $x \in \text{Im}(f^p)$, il existe un vecteur $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. De plus, comme $x \in \ker(f^p)$, on a $f^p(x) = 0_E$, c'est-à-dire $f^{2p}(y) = 0_E$. Cela signifie que $y \in \ker(f^{2p})$. Par la stationnarité, $\ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$, donc $y \in \ker(f^p)$. Il en résulte que $x = f^p(y) = 0_E$. Ainsi, $\ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0_E\}$.

b D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f^p sur E , on a :

$$\dim(\ker(f^p)) + \dim(\text{Im}(f^p)) = \dim(E)$$

Avec l'intersection triviale établie précédemment, cela démontre que $E = \ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p)$.

④ Propriétés des restrictions

a Soit $x \in F = \ker(f^p)$. On a $f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(0_E) = 0_E$, donc $f(x) \in \ker(f^p) = F$. Le sous-espace F est donc stable par f .
Soit $y \in G = \text{Im}(f^p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. Alors $f(y) = f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$, donc $f(y) \in \text{Im}(f^p) = G$. Le sous-espace G est donc stable par f .

b Par définition, pour tout $x \in F = \ker(f^p)$, on a $f^p(x) = 0_E$, d'où $(f|_F)^p = 0$. D'autre part, $\ker(f^p) \neq \ker(f^{p-1})$ (par définition de p). Il existe donc $x \in \ker(f^p) \setminus \ker(f^{p-1})$. Pour un tel $x_0 \in F$, on a $f^{p-1}(x_0) \neq 0$, donc $(f|_F)^{p-1} \neq 0$.

c La restriction $f|_G$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie G . Il suffit de vérifier son injectivité.
Soit $x \in G$ tel que $f|_G(x) = 0_E$. Alors $x \in \ker(f) \cap G \subset \ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$. Étant injectif en dimension finie, $f|_G$ est un automorphisme de G .

Partie B : Étude des écarts de dimension

① Étude des sauts de dimension des noyaux

a Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifions que l'application f induit un morphisme $\tilde{f} : \ker(f^{k+2}) \rightarrow \ker(f^{k+1})$. Soit $x \in \ker(f^{k+2})$. Alors $f^{k+2}(x) = 0_E$, ce qui s'écrit $f^{k+1}(f(x)) = 0_E$, soit $f(x) \in \ker(f^{k+1})$. L'endomorphisme f stabilise l'espace $\ker(f^{k+2})$ et son image par f est incluse dans $\ker(f^{k+1})$. L'application induite $\tilde{f}$ est donc bien définie.

b Déterminons le noyau et l'image de $\tilde{f}$:

- ☞ Le noyau de $\tilde{f}$ est l'ensemble des $x \in \ker(f^{k+2})$ tels que $\tilde{f}(x) = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) = 0_E$. On a donc $\ker(\tilde{f}) = \ker(f^{k+2}) \cap \ker(f) = \ker(f)$.
- ☞ L'image de $\tilde{f}$ est constituée des éléments $y \in \ker(f^{k+1})$ tels qu'il existe $x \in \ker(f^{k+2})$ avec $y = f(x)$. Donc $\text{Im}\tilde{f} = f(\ker(f^{k+2}))$.

② a Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\ker(f^k)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\ker(f^{k+1})$, il admet toujours un sous-espace vectoriel supplémentaire F_k dans $\ker(f^{k+1})$. On a donc l'écriture en somme directe :

$$\ker(f^{k+1}) = \ker(f^k) \oplus F_k$$

b Soit $p = p_{F_k \parallel \ker(f^k)}$ la projection sur F_k parallèlement à $\ker(f^k)$.
Soit $x \in F_{k+1} \subset \ker(f^{k+2})$. Alors $f^{k+2}(x) = 0_E$, ce qui s'écrit $f^{k+1}(f(x)) = 0_E$, donc $f(x) \in \ker(f^{k+1}) = \ker(f^k) \oplus F_k$.
Posons $f(x) = a + b$ tq. $a \in \ker(f^k)$ et $b \in F_k$. où $b = p(f(x)) = g(x)$ est défini, car unique.

De plus g est linéaire, en tant que composée d'applications linéaires.

c Montrons que g est injective. Soit $x \in \ker(g)$.
En effet : $x \in \ker g \Rightarrow x \in F_{k+1}$ et $p(f(x)) = 0_E \Rightarrow x \in F_{k+1}$ et $f(x) \in \ker(f^k) \Rightarrow x \in F_{k+1}$ et $f^{k+1}(x) = 0_E \Rightarrow x \in F_{k+1} \cap \ker f^{k+1} = \{0_E\}$.
Ainsi, $x = 0_E$, ce qui prouve l'injectivité de g .

d Puisque g est une application linéaire injective allant de l'espace vectoriel de dimension finie F_{k+1} vers F_k , on a directement l'inégalité sur les dimensions :

$$\dim F_{k+1} \leq \dim F_k$$

- e** En se rappelant que la dimension du supplémentaire F_k correspond exactement au saut de dimension $d_k = \dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k) = \dim F_k$, l'inégalité précédente se réécrit directement :

$$d_{k+1} \leq d_k$$

La suite des sauts de dimension est donc décroissante.

3 Conséquences sur la suite des images itérées

- a** D'après le théorème du rang appliqué à f^k et f^{k+1} :

$$\dim \operatorname{Im}(f^k) - \dim \operatorname{Im}(f^{k+1}) = (n - u_k) - (n - u_{k+1}) = u_{k+1} - u_k = d_k$$

- b** La suite des dimensions des images est décroissante, et l'écart entre deux termes consécutifs est égal à d_k . Puisque la suite des sauts $(d_k)_{k \geq 0}$ est décroissante, la diminution des dimensions des images est aussi décroissante.

- c** On a $d_k \leq d_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où $\sum_{k=0}^{p-1} d_k \leq \sum_{k=0}^{p-1} d_0$.

$$\text{Ce qui donne } \sum_{k=0}^{p-1} (\dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k)) \leq p \cdot d_0.$$

Autrement dit : $\dim \ker(f^p) - \dim \ker(f^0) \leq p \cdot (\dim \ker(f) - \dim \ker(f^0))$.

Qui devient $n \leq p \cdot \dim \ker f$, car $\dim \ker(f^p) = \dim \ker 0 = \dim E = n$ et $\dim \ker(f^0) = \dim \ker \operatorname{Id}_E = 0$.

- 4 Interprétation géométrique** La convexité ou concavité de la suite des dimensions des noyaux s'étudie via la relation d'accroissement :

$$u_{k+1} - u_k \leq u_k - u_{k-1} \iff u_{k+1} + u_{k-1} \leq 2u_k$$

Cette inéquation exprime la concavité de la suite des dimensions des noyaux successifs.

- 5 Cas où $\dim \ker(f^k) = k$** Si $\dim \ker(f^k) = k$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, alors pour $k = n$, on a $\dim \ker(f^n) = n = \dim E$, donc $f^n = 0$.
pour $k = n - 1$, on a $\dim \ker(f^{n-1}) = n - 1 \neq \dim E$, donc $f^{n-1} \neq 0$
L'indice de nilpotence est exactement égal à n .

6 Étude d'un endomorphisme nilpotent d'indice n

- a** Supposons que pour un certain $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on avait $\dim \ker(f^{k+1}) = \dim \ker(f^k)$, alors (partie A), on aurait $\ker(f^p) = \ker(f^k)$, pour tout $p \geq k$. En particulier $\ker f^n = \ker f^k = \ker f^{n-1}$ ce qui contredit le fait que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Donc $\dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k) \neq 0$.

- b** Comme les dimensions sont des entiers et que les sauts sont non nuls, on a $d_k \geq 1$, ce qui implique par récurrence immédiate que $\dim \ker(f^k) \geq k$.

- c** $1 \leq d_p \Rightarrow k = \sum_{p=0}^{k-1} d_p \leq \sum_{p=0}^{k-1} d_p = \sum_{p=0}^{k-1} (\dim \ker(f^{p+1}) - \dim \ker(f^p)) = \dim \ker f^k - \dim \ker f^0 = \dim \ker f^k$. D'où le résultat demandé si on utilise la question précédente.

- 7 Conclusion** Un endomorphisme f de E est nilpotent d'indice de nilpotence exact n si et seulement si la suite de ses noyaux vérifie $\dim \ker(f^k) = k$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Fin