

DM : Algèbre Linéaire

Polynômes

Samedi 10 Octobre 2026 (Durée : 2 heures)

Remarque : Le devoir est composé de quatre parties largement indépendantes, mais qui ont un point commun : montrer que des familles de polynômes populaires forment chacune une famille orthogonale pour un produit scalaire bien choisi.

Partie A : Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^{(n)})$

① Justifier que L_n est un polynôme de degré n . Calculer $L_n(1)$.

② Déterminer son coefficient dominant ainsi que sa parité.

③ **Orthogonalité :** On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$

a Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) < n$, on a $\langle L_n, P \rangle = 0$.

b En déduire que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$, $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.

c Montrer que $\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$

Indication : Utiliser sans démo $\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.



Adrien-Marie Legendre (1752–1833) :

Mathématicien français qui a profondément marqué l'analyse, la géométrie et la théorie des nombres.

Il est l'inventeur de la méthode des moindres carrés, un outil statistique aujourd'hui fondamental pour l'analyse de données

Partie B : Polynômes d'Hermite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2} \right)^{(n)}$

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .

② Déterminer son coefficient dominant et sa parité.

③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ (pour $n \geq 1$).

④ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ (avec $H_{-1} = 0$)

⑤ En déduire que $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$

⑥ **Orthogonalité :** On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$

a Montrer que pour tout $n \neq m$, $\langle H_n, H_m \rangle = 0$.

b Calculer $\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle$. Indic : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.



Charles Hermite (1822-1901) :

Mathématicien français, reconnu pour son rôle central dans le développement de l'algèbre et de l'analyse.

Il démontre en particulier la transcendance du nombre e , et résout les équations générales du 5ème degré.

Partie C : Polynômes de Tchebechev

On pose $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\deg T_n = n$ et $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$.

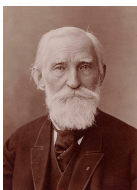
② En déduire que $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

③ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

④ **Orthogonalité** : On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

a Montrer que pour tout $n \neq m$, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.

b Calculer la norme $\|T_n\|^2 = \langle T_n, T_n \rangle$.



Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894) :

Mathématiciens russes, célèbre pour ses contributions fondatrices en théorie des nombres, en statistiques et en mécanique.

Né dans une famille de la petite noblesse russe, il souffre dès l'enfance d'une claudication (boiterie) due à une maladie ou une malformation

Partie D : Polynômes de Laguerre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} (x^n e^{-x})^{(n)}$

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n .

② Déterminer son coefficient dominant ainsi que sa valeur en 0, $L_n(0)$.

③ Calculer $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$.

④ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$

⑤ Établir la relation : $L'_n(x) = L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)$.

⑥ Montrer que : $(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) - (n+1-x)L_n(x)$

⑦ En déduire que : $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$

⑧ **Orthogonalité**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$

a Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.

b Calculer la norme $\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n \rangle$. (Indic : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$)



Edmond Laguerre (1834–1886) :

Mathématicien français, principalement connu pour ses travaux en analyse et en géométrie.

Il est également le fondateur de la géométrie dirigée et a introduit le concept d'orientation des lignes et des cercles.

Corrigé

Partie A : Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

① Justifions que L_n est un polynôme de degré n et calculons $L_n(1)$:

Le polynôme $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$ est de degré $2n$. En le dérivant n fois, on obtient un polynôme de degré $2n - n = n$.

Pour calculer $L_n(1)$, remarquons que $(X^2 - 1)^n = (X - 1)^n (X + 1)^n$.

Par la formule de Leibniz on a :

$$\begin{aligned} L_n(X) &= \frac{1}{2^n n!} ((X - 1)^n (X + 1)^n)^{(n)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X - 1)^n)^{(k)} ((X + 1)^n)^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X - 1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (X + 1)^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k \end{aligned}$$

Or pour $X = 1$, on remarque que $(X - 1)^{n-k} = 0$, sauf pour $k = n$, où ça vaut 1, et dans ce cas $(X + 1)^k$ vaut 2^n . Ainsi, $L_n(1) = 1$.

② Déterminons son coefficient dominant et sa parité :

Le polynôme $(X^2 - 1)^n = X^{2n} + P(X)$ tq $\deg(P) < 2n$, donc

$$\text{cd}((X^2 - 1)^n)^{(n)} = \text{cd}(X^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!} \text{cd}(X^{2n-n}) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Ainsi, le coefficient dominant de L_n est égal à $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

Pour la parité, remarquons que la fonction $X \mapsto (X^2 - 1)^n$ est une fonction paire (puisque $((-X)^2 - 1)^n = (X^2 - 1)^n$). En dérivant n fois une fonction paire, sa parité est $(-1)^n$.

Par conséquent, L_n est une fonction paire si n est pair, et impaire si n est impair, ce qui

s'écrit $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$.

③ Étude de l'orthogonalité : On muni $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

a Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) < n$, montrons que $\langle L_n, P \rangle = 0$.

Posons $Q(X) = (X^2 - 1)^n$. On a $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} Q^{(n)}(X)$.

À l'aide d'intégrations par parties successives n fois, on a :

$$\begin{aligned} \langle L_n, P \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q^{(n)}(t) P(t) dt \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[Q^{(k)}(t) P^{(n-1-k)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 Q(t) P^{(n)}(t) dt \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $Q^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, puisque 1 est une racine de $Q(X)$ de multiplicité n et car $P^{(n)} = 0$ puisque $\deg(P) < n$.

Par conséquent, $\langle L_n, P \rangle = 0$.

b En déduisons que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$, $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.

Sans perte de généralité, supposons par exemple que $m < n$. D'après la question précédente appliquée avec le polynôme $P = L_m$ de degré strictement inférieur à n , on a immédiatement $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.

c Montrons que $\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$.

En effectuant n intégrations par parties sur $\langle L_n, L_n \rangle$ (Prendre $P = L_n$) comme à la question a, on obtient (puisque cette fois $\deg P = n$) :

$$\begin{aligned}\langle L_n, L_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n ((t^2 - 1)^n)^{(n)} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q(t) L_n^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \frac{1}{2^n n!} ((t^2 - 1)^n)^{(2n)} dt \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \quad \text{car } ((t^2 - 1)^n)^{(2n)} = \frac{(2n)!}{(2n - n)!} \\ &= \frac{2}{2n + 1} \quad \text{car } \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n + 1)!}\end{aligned}$$

Partie B : Polynômes d'Hermite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$.

① Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n :

Par récurrence sur n , montrons que $(e^{-x^2})^{(n)} = P_n(x) e^{-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré n . Pour $n = 0$, $P_0(x) = 1$ (degré 0). Supposons la propriété vraie au rang n . En dérivant, on a $(P_n(x) e^{-x^2})' = (P_n'(x) - 2x P_n(x)) e^{-x^2}$, ce qui montre que $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2x P_n(x)$ est de degré $n + 1$. Ainsi, $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est un polynôme de degré n .

② Déterminons son coefficient dominant et sa parité :

Le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n 2^n$ (à faire par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$), donc le coefficient dominant de $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est égal à 2^n .

Pour la parité, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire. Sa n -ième dérivée a la même parité que $(-1)^n$. En multipliant par e^{x^2} (qui est pair) et par $(-1)^n$, la parité globale de H_n est celle de $(-1)^n \times (-1)^n$, ce qui signifie que H_n est pair si n est pair, et impair si n est impair ($H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$).

③ Montrons que pour tout $n \geq 1$, $H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned}\text{En effet : } H_n'(x) &= \left((-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} \right)' \\ &= (-1)^n \left(2x e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} + e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n+1)} \right) \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left(2x (e^{-x^2})^{(n)} + (e^{-x^2})'^{(n)} \right) \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left(2x (e^{-x^2})^{(n)} - (2x e^{-x^2})^{(n)} \right) \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left(2x (e^{-x^2})^{(n)} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^{(k)} (e^{-x^2})^{(n-k)} \right) \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left(2x (e^{-x^2})^{(n)} - \binom{n}{0} (2x)^{(0)} (e^{-x^2})^{(n)} \right) \\ &\quad - (-1)^n e^{x^2} \left(\binom{n}{1} (2x)^{(1)} (e^{-x^2})^{(n-1)} \right) \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left(2x (e^{-x^2})^{(n)} - 2x (e^{-x^2})^{(n)} - 2n (e^{-x^2})^{(n-1)} \right) \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left(-2n (e^{-x^2})^{(n-1)} \right) \\ &= 2n H_{n-1}(x)\end{aligned}$$

④ Établissons la relation de récurrence d'ordre 2 :

En effet : On sait que $(e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$

$$\begin{aligned}\text{D'où } (e^{-x^2})^{(n+1)} &= \left((-1)^n e^{-x^2} H_n(x) \right)' \\ &= (-1)^n \left(-2x e^{-x^2} H_n(x) + e^{-x^2} H_n'(x) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi : } H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n+1)} \\ &= -e^{x^2} \left(-2x e^{-x^2} H_n(x) + e^{-x^2} H_n'(x) \right) \\ &= 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)\end{aligned}$$

⑤ Déduisons-en l'équation différentielle satisfaite par H_n :

Selon la question précédente, on a : $H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$.

So on dérive encore une fois, on obtient : $H_{n+1}'(x) - 2H_n(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_{n-1}'(x) = 0$

Or $H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$, donc $H_{n+1}'(x) - 2H_n(x) - 2x H_n'(x) + H_n''(x) = 0$.

D'autre part : $H_{n+1}'(x) = 2(n+1) H_n(x)$,

d'où : $2(n+1) H_n(x) - 2H_n(x) - 2x H_n'(x) + H_n''(x) = 0$.

Donc $2nH_n(x) - 2xH'_n(x) + H''_n(x) = 0$.

D'où l'équation différentielle d'Hermite : $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$

⑥ Étude de l'orthogonalité :

On muni $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

a Montrons que pour tout $n \neq m$, $\langle H_n, H_m \rangle = 0$:

En effet : comme $n \neq m$, on peut supposer (par exemple) que $m < n$

$$\begin{aligned}\langle H_n, H_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2})^{(n)} H_m(x) dx \text{ car } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[(e^{-t^2})^{(k)}(t) H_m^{(n-1-k)}(t) \right]_{-A}^A \right) \\ &\quad + (-1)^n \left(-1^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m^{(n)}(t) dt \right) \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[(e^{-t^2})^{(k)}(t) H_m^{(n-1-k)}(t) \right]_{-A}^A \right) \\ &\quad \text{car } \deg H_m = m < n \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[(-1)^k e^{-t^2} H_k(t) H_m^{(n-1-k)}(t) \right]_{-A}^A \right) \\ &\quad \text{car } H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} (e^{-x^2})^{(k)} \\ &= 0 \quad \text{car } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-t^2} P(t) = 0 \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}[X]\end{aligned}$$

b Calculons $\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle$:

Le raisonnement est le même que la question précédente, sauf que cette fois $m = n$ (les limites des crochets en $\pm\infty$ sont toujours nuls).

$$\begin{aligned}\text{Ainsi : } \|H_n\|^2 &= \langle H_n, H_n \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n^{(n)}(t) dt \\ &= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ car } \deg H_n = n, \text{cd} H_n = 2^n \\ &= 2^n n! \sqrt{\pi} \text{ car } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Partie C : Polynômes de Tchebechev

① Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et que $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$

Pour $n = 1$, $\deg(T_1) = 1$ et $\text{cd}(T_1) = 2^0 = 1$.

En utilisant la relation de récurrence, le terme de plus haut degré de T_{n+2} s'obtient par celui de $2XT_{n+1}$: $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = 1 + (n+1) = n+2$

Et pour le coefficient dominant : $\text{cd}(T_{n+2}) = 2 \times \text{cd}(T_{n+1}) = 2 \times 2^{(n+1)-1} = 2^n$

② Puisque la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est constituée de $n+1$ polynômes dont les degrés sont étagés de 0 à n (chaque polynôme est de degré exact k), cette famille est échelonnée en degrés, donc libre.

Étant de cardinal $n+1$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, elle forme une base :

$$\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_n) [\text{cite : 12}]$$

③ Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos t) = \cos(nt)$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est immédiat ($T_0(\cos t) = 1 = \cos(0)$ et $T_1(\cos t) = \cos t$). En utilisant la formule de duplication $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, on obtient : $T_{n+2}(\cos t) = 2 \cos t \cos((n+1)t) - \cos(nt) = \cos((n+2)t)$

④ Étude de l'orthogonalité

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

a Orthogonalité pour $n \neq m$

En effectuant le changement de variable $x = \cos t$, on a $dx = -\sin t dt = -\sqrt{1-x^2} dt$. L'intégrale du produit scalaire se réécrit à l'aide des polynômes trigonométriques :

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle &= \int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)t)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)t)}{n-m} \right]_0^\pi \\ &= 0\end{aligned}$$

b Calcul de la norme

Pour $n = 0$: $\|T_0\|^2 = \int_0^\pi 1 dt = \pi$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: le calcul est similaire

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_n \rangle &= \int_0^\pi \cos(nt) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2nt) + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} + t \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Partie D : Polynômes de Laguerre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} (x^n e^{-x})^{(n)}$

① Montrons que L_n est un polynôme de degré n :

En utilisant la formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit :

$$(x^n e^{-x})^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}$$

En factorisant par e^{-x} , on obtient :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Le terme de plus haut degré correspond à $k = 0$, ce qui donne un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $\frac{(-1)^n}{n!}$.

② Coefficient dominant et valeur en 0 :

Le coefficient dominant est $\frac{(-1)^n}{n!}$. Pour $L_n(0)$, en évaluant l'expression de la somme précédente pour $x = 0$, seul le terme de plus bas degré (pour $k = n$) subsiste, ce qui donne :

$$L_n(0) = \binom{n}{n} \frac{(-1)^0}{0!} = 1$$

③ Calculs explicites pour $n = 0, 1, 2$:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$$

④ Relation de récurrence d'ordre 3 :

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

$$\begin{aligned}\text{En effet :} \quad L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} (x^n e^{-x})^{(n)} \\ \text{d'où} \quad (n+1)L_{n+1}(x) &= e^x (x^{n+1} e^{-x})^{(n+1)} \\ \text{Or} \quad (x^{n+1} e^{-x})' &= (n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1} e^{-x} \\ \text{D'où} \quad (x^{n+1} e^{-x})^{(n+1)} &= [(n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1} e^{-x}]^{(n)} \\ &= (n+1)(x^n e^{-x})^{(n)} - (x^{n+1} e^{-x})^{(n)} \\ \text{Donc} \quad e^x (x^n e^{-x})^{(n)} &= n! L_n(x) \\ &= xn! L_n(x) - n! n L_{n-1}(x) \\ \text{D'où} \quad (n+1)L_{n+1}(x) &= (n+1)n! L_n(x) - [xn! L_n(x) - n! n L_{n-1}(x)] \\ \text{Finalement :} \quad (n+1)L_{n+1}(x) &= (n+1)L_n(x) - xL_n(x) + nL_{n-1}(x) \\ &= (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\end{aligned}$$

⑤ Relation sur la dérivée :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} (x^n e^{-x})^{(n)} \\
 \text{Donc : } n! L_n(x) &= e^x (x^n e^{-x})^{(n)} \\
 \text{D'où : } (n! L_n(x))' &= \left(e^x (x^n e^{-x})^{(n)} \right)' \\
 \text{Donc : } n! L'_n(x) &= e^x (x^n e^{-x})^{(n)} + e^x (x^n e^{-x})^{(n+1)} \\
 &= n! L_n(x) + e^x (x^n e^{-x})^{(n+1)} \\
 &= n! L_n(x) + e^x \left((x^n e^{-x})' \right)^{(n)} \\
 &= n! L_n(x) + n e^x (x^{n-1} e^{-x})^{(n)} - e^x (x^n e^{-x})^{(n)} \\
 &= n e^x (x^{n-1} e^{-x})^{(n)} \\
 &= n e^x \left((x^{n-1} e^{-x})^{(n-1)} \right)' \\
 &= n e^x ((n-1)! e^{-x} L_{n-1}(x))' \\
 &= n! e^x (-e^{-x} L_{n-1}(x) + e^{-x} L'_{n-1}(x)) \\
 &= n! (-L_{n-1}(x) + L'_{n-1}(x)) \\
 \text{Finalement : } L'_n(x) &= L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

⑥ Montrons que : $(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) - (n+1-x)L_n(x)$.
On sait que : $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$.
Or : $xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$, donc $nL_{n-1}(x) = nL_n(x) - xL'_n(x)$.
D'où : $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - (nL_n(x) - xL'_n(x))$.
Donc : $(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$.

⑦ Équation différentielle de Laguerre :
On sait que : $(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$
Donc $\left((n+1)L_{n+1}(x) \right)' = \left(xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x) \right)'$,
d'où $(n+1)L'_{n+1}(x) = L'_n(x) + xL''_n(x) - L_n(x) + (n+1-x)L'_n(x)$,
donc $(n+1)L'_{n+1}(x) = xL''_n(x) + (n+2-x)L'_n(x) - L_n(x)$.
Or $L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$, ce qui donne :
 $(n+1)(L'_n(x) - L_n(x)) = xL''_n(x) + (n+2-x)L'_n(x) - L_n(x)$.

Finalement : $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$.

⑧ Étude de l'orthogonalité : On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

a Supposons par exemple $m < n$, donc

$$\begin{aligned}
 \langle L_n, L_m \rangle &= \int_0^{+\infty} L_n(t)L_m(t)e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^t}{n!} (t^n e^{-t})^{(n)} \right) L_m(t)e^{-t} dt \\
 &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} (t^n e^{-t})^{(n)} L_m(t) dt \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[(t^n e^{-t})^{(k)} L_m^{(n-1-k)}(t) \right]_0^A \\
 &\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} L_m^{(n)}(t) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Car $L_m^{(n)}(t) = 0$, puisque $\deg L_m = m < n$ et car

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left((t^n e^{-t})^{(k)} L_m^{(n-1-k)}(t) \right) = 0$ puisque les polynômes sont négligeables devant les puissances en $+\infty$ et enfin car $(t^n e^{-t})^{(k)}$ est nulle en $t = 0$ (on dérive à l'aide de la formule de Leibniz, puis on prend $t = 0$).

b Si $n = m$, le même raisonnement que celui de la question précédente donne que :

$$\begin{aligned}
 \langle L_n, L_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} L_n^{(n)}(t) dt \\
 &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ car } \deg L_n = n, \text{ cd}(L_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \\
 &= 1 \text{ car } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!
 \end{aligned}$$

Fin