DM : Intégration

Wallis, Gauss & Gamma d'Euler

Samedi 21 Novembre 2026 (Durée : 2h)

Partie A : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t = w_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$. **Indic** : IPP.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $w_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Montrer que la suite (w_n) est décroissante.
5. En déduire que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_{n-1}$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n w_n w_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
7. En déduire que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
8. En déduire un équivalent simple pour $\binom{2n}{n}$.

Partie B : Intégrale de Gauss

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelconque mais fixé.
   Montrer que $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$
   Indication : $\ln(1+x) \leq x$, pour tout réel $x > -1$
3. En déduire que $\sqrt{n} I_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}.J_n$,
   où $I_n = \int_0^1 (1-u^2)^n \mathrm{d}u$ et $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^n} \mathrm{d}u$.
4. Établir que $I_n = w_{2n+1}$, puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. On pose $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} \mathrm{d}u$. Dire pourquoi K_n est bien défini.
   Établir que $K_n = w_{2n-2}$, puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} K_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
6. Montrer que $0 \leqslant K_n - J_n \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
7. Conclure enfin que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie C : Fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Gamma(x)$ converge ssi $x > 0$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
4. Montrer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

   Indication : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. En déduire une formule générale pour $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie D : Intégrale de Laplace

Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose : $J(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x$.

1. justifier la convergence de $J(a,b)$.
2. En notant $c = \sqrt{ab}$, et à l'aide d'un changement de variable, montrer que :
   $J(a,b) = \dfrac{e^{-2c}}{\sqrt{a}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(u-\frac{c}{u}\right)^2}\,\mathrm{d}u$.
3. On pose $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{c}{u}\right)^2}\,\mathrm{d}u$.
   - [a] Á l'aide d'un changement de variable, montrer que : $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{c}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(t-\frac{c}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$.
   - [b] En déduire que : $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{c}{u^2}\right)\mathrm{e}^{-\left(u-\frac{c}{u}\right)^2}\,\mathrm{d}u$.
   - [c] Á l'aide d'un changement de variable, montrer que : $2K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w$.
4. En déduire que $J(a,b) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}$.

Partie E : Applications

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
   - [a] justifier la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - [b] Trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
   - [c] En déduire la valeur explicite de I_{2p} et de I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$
2. Soient $\beta > 0$ et $\alpha > -1$. On pose : $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x$
   - [a] Justifier la convergence $(I(\alpha,\beta)$.
   - [b] Á l'aide d'un changement de variable, montrer que : $I(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{2\beta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)$.
   - [c] En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^4\mathrm{e}^{-3x^2}\,\mathrm{d}x$.

FiN

Corrigé

Partie A : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

(1) Égalité avec le sinus :

Effectuons le changement de variable affine $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, \mathrm{d}u = w_n.$$

(2) Relation de récurrence :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons $w_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \cdot \cos(t) \, \mathrm{d}t$ et effectuons une intégration par parties sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \Big[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos^2(t)\big)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)(w_n - w_{n+2}). \end{aligned}$$

En regroupant les termes en w_{n+2}, il vient $(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n.$$

(3) Expressions explicites de w_{2n} et w_{2n+1} :

On calcule d'abord les deux premiers termes :

$$w_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad w_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

☞ Par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, pour les indices pairs :

$$w_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} w_0 = \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \cdots \times 2n)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

☞ De même, pour les indices impairs ($n \in \mathbb{N}$) :

$$w_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} w_1 = \frac{(2 \times 4 \times \cdots \times 2n)^2}{(2n+1)!} \cdot 1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(4) Monotonie de la suite (w_n) :

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$, donc en multipliant par $\cos^n t \geq 0$, on obtient $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. Par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < w_{n+1} \leq w_n.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante (et minorée par 0).

(5) Équivalent $w_n \sim w_{n-1}$:

D'après la décroissance de (w_n), pour tout $n \geq 2$, on a $w_{n+1} \leq w_n \leq w_{n-1}$. En divisant par $w_{n-1} > 0$ (car $t \mapsto \cos^{n-1} t$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) et en utilisant $w_{n+1} = \frac{n}{n+1} w_{n-1}$:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{w_{n+1}}{w_{n-1}} \leq \frac{w_n}{w_{n-1}} \leq 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, le théorème des encadrements de limites donne $\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{w_{n-1}} = 1$, c'est-à-dire :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_{n-1}.$$

6 **Produit nw_nw_{n-1} et équivalent de w_n :**
Posons $u_n = nw_nw_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} = (n+1)w_{n+1}w_n = (n+1)\left(\frac{n}{n+1}w_{n-1}\right)w_n = nw_nw_{n-1} = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante, égale à $u_1 = 1 \cdot w_1 \cdot w_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nw_nw_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $w_{n-1} \sim w_n$, il vient $nw_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. Puisque $w_n > 0$ et $\frac{\pi}{2n} > 0$, on peut passer à la racine carrée dans l'équivalent :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

7 **Équivalent de $\binom{2n}{n}$:**
D'après la question 3, on a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2^{2n}}{\pi/2}w_{2n} = \frac{4^n}{\pi/2}w_{2n}$. Or, d'après la question 6 appliquée au rang $2n$, $w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Par conséquent :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\pi/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Partie B : Intégrale de Gauss

1 **Convergence de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$:**
La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. L'intégrale est donc uniquement généralisée en $+\infty$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, donc $\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge (intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$). Par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

2 **Encadrement de e^{-x^2} :**
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \sqrt{n}[$. Alors $u = \frac{x^2}{n} \in [0, 1[$, de sorte que $-u > -1$ et $u > -1$. L'inégalité rappelée $\ln(1+y) \leq y$ (valable pour tout $y > -1$ par concavité du logarithme) appliquée à $y = -u$ et à $y = u$ donne :

$$\ln(1-u) \leq -u \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \leq u \iff -u \leq -\ln(1+u).$$

En multipliant cet encadrement par $n > 0$:

$$n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leq -x^2 \leq -n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right).$$

Par croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall x \in [0, \sqrt{n}[, \quad \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

Par continuité des trois fonctions en $x = \sqrt{n}$, cet encadrement reste vrai sur tout le segment $[0, \sqrt{n}]$.

3 **Encadrement intégral :**
Intégrons l'inégalité précédente sur le segment $[0, \sqrt{n}]$ (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $0 < \sqrt{n}$) :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

Dans les intégrales extrêmes, effectuons le changement de variable linéaire $u = \frac{x}{\sqrt{n}}$ (bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \sqrt{n}]$ sur $[0, 1]$, avec $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\,\mathrm{d}u$) :

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-u^2)^n\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n},$$

soit exactement $\sqrt{n}I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}J_n$.

4 **Calcul de I_n et limite de $\sqrt{n}I_n$:**

Dans $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-u^2)^n \,\mathrm{d}u$, posons $u = \sin t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (bijection de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathrm{d}u = \cos t \,\mathrm{d}t$) :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t = w_{2n+1}.$$

D'après la question A.6, $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Par produit d'équivalents :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5 **Étude de K_n :**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{(1+u^2)^n}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, $\dfrac{1}{(1+u^2)^n} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2n}}$. Comme $2n \geq 2 > 1$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2n}}$ converge, donc K_n est bien définie.

Effectuons le changement de variable $u = \tan t$, bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$ avec $\mathrm{d}u = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$ et $1+u^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$:

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^n \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \,\mathrm{d}t = w_{2n-2}.$$

Pour $n \geq 2$, $w_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} K_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6 **Comparaison entre K_n et J_n :**

Par relation de Chasles, $K_n - J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n} \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive sur $[1, +\infty[$). Par ailleurs, pour tout $u \geq 1$, on a $1+u^2 \geq 2u$ (car $(u-1)^2 \geq 0 \iff u^2+1 \geq 2u$), ou plus simplement $1+u^2 \geq 2$ et $1+u^2 \geq u^2$. On peut écrire :

$$\forall u \geq 1, \quad (1+u^2)^n = (1+u^2)^{n-1}(1+u^2) \geq 2^{n-1}(1+u^2).$$

En passant à l'inverse et en intégrant sur $[1, +\infty[$:

$$0 \leq K_n - J_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \Big[\arctan u\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

On en déduit $0 \leq \sqrt{n}K_n - \sqrt{n}J_n \leq \dfrac{\pi\sqrt{n}}{2^{n+1}}$. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} = 0$. Par encadrement et somme de limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} J_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} K_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7 **Valeur de l'intégrale de Gauss :**

Reprenons l'encadrement de la question 3 :

$$\sqrt{n} I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \leq \sqrt{n} J_n.$$

Lorsque $n \to +\infty$, les deux membres extrêmes convergent vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, tandis que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (car l'intégrale converge d'après la question 1). Par le théorème des encadrement de limites :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Partie C : Fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1 **Domaine de définition :**

La fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. L'intégrale est doublement généralisée en 0 et en $+\infty$. Découpons-la en $t = 1$:

☞ **En $+\infty$:**
Par croissances comparées, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $f_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☞ **En 0^+ :**
On a $f_x(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. D'après le critère de Riemann au voisinage de 0, cette intégrale de fonctions positives converge si et seulement si $1-x<1 \iff x>0$.

En conclusion, $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x>0$ ($\mathcal{D}_\Gamma =]0,+\infty[$).

② **Relation fonctionnelle :**
Soit $x>0$. Pour $0<\varepsilon<A$, intégrons par parties sur le segment $[\varepsilon, A]$ en posant $u(t)=t^x$ et $v'(t)=\mathrm{e}^{-t}$ (de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_\varepsilon^A t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\Big]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -A^x\mathrm{e}^{-A} + \varepsilon^x\mathrm{e}^{-\varepsilon} + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $x>0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^x\mathrm{e}^{-\varepsilon}=0$, et par croissances comparées $\lim\limits_{A\to+\infty} A^x\mathrm{e}^{-A}=0$. En passant à la limite lorsque $\varepsilon\to0^+$ et $A\to+\infty$, on obtient :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

③ **Valeur aux entiers :**
On calcule $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1 = 0!$. Par une récurrence immédiate à l'aide de la relation $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

④ **Valeur en $\frac{1}{2}$:**
On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Effectuons le changement de variable $x=\sqrt{t}$ ($t=x^2$), bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ avec $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

⑤ **Formule générale pour $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$:**
Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ en utilisant $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.$$

Partie D : Intégrale de Laplace

Soient $a>0$ et $b>0$. On pose $J(a,b) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x$.

① **Convergence de $J(a,b)$:**
La fonction $g : x\mapsto \mathrm{e}^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

☞ **En 0^+ :**
Comme $b>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)=+\infty$, donc $\lim_{x\to0^+} g(x)=0$. La fonction g est ainsi prolongeable par continuité en 0, d'où la convergence de $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ (fausse impropreté).

☞ **En $+\infty$:**
Comme $b>0$, pour tout $x>0$ on a $ax^2+\frac{b}{x^2}\geq ax^2$, d'où $0\leq g(x)\leq \mathrm{e}^{-ax^2}$. Or, par le changement de variable $u=\sqrt{a}x$, $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ converge (d'après la partie B). Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Ainsi, $J(a,b)$ est convergente.

② **Réécriture avec $c=\sqrt{ab}$:**
Remarquons l'identité remarquable :

$$ax^2+\frac{b}{x^2} = \left(\sqrt{a}x - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2 + 2\sqrt{ab}.$$

Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{a}x$ (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a}}$). Avec $c = \sqrt{ab}$, on a $\dfrac{\sqrt{b}}{x} = \dfrac{\sqrt{ab}}{u} = \dfrac{c}{u}$, d'où :

$$J(a,b) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2c}\mathrm{e}^{-\left(u-\frac{c}{u}\right)^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a}} = \frac{\mathrm{e}^{-2c}}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{c}{u}\right)^2} \mathrm{d}u.$$

(3) Calcul de $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{c}{u}\right)^2} \mathrm{d}u$:

a Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{c}{t}$ (bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ puisque $c > 0$, avec $\mathrm{d}u = -\dfrac{c}{t^2}\,\mathrm{d}t$) :

$$K = \int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-\left(\frac{c}{t}-t\right)^2} \left(-\frac{c}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{c}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(t-\frac{c}{t}\right)^2} \mathrm{d}t,$$

car $\left(\dfrac{c}{t}-t\right)^2 = \left(t-\dfrac{c}{t}\right)^2$.

b En additionnant l'expression initiale de K et celle obtenue en a. (en renommant t en u), on obtient par linéarité de l'intégrale convergente :

$$2K = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{c}{u^2}\right) \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{c}{u}\right)^2} \mathrm{d}u.$$

c Posons $\varphi(u) = u - \dfrac{c}{u}$ sur $]0,+\infty[$. La fonction φ est dérivable et $\varphi'(u) = 1+\dfrac{c}{u^2} > 0$, donc φ réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{0^+}\varphi, \lim\limits_{+\infty}\varphi[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. Le changement de variable $w = u - \frac{c}{u}$ (avec $\mathrm{d}w = \left(1+\dfrac{c}{u^2}\right)\mathrm{d}u$) donne immédiatement :

$$2K = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w.$$

(4) Valeur de $J(a,b)$:

Par parité de $w \mapsto \mathrm{e}^{-w^2}$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$2K = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w = 2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \implies K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En reportant dans la formule de la question 2 avec $c = \sqrt{ab}$, on conclut :

$$J(a,b) = \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}.$$

Partie E : Applications

(1) Étude de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N})$:

a **Convergence :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. En $+\infty$, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(x^n\mathrm{e}^{-x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, donc $x^n\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b **Relation de récurrence :**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A > 0$. Écrivons $x^{n+2}\mathrm{e}^{-x^2} = x^{n+1}\cdot\left(x\mathrm{e}^{-x^2}\right)$ et intégrons par parties sur $[0,A]$ en posant $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ (d'où $v(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$) :

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{2}x^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^A + \frac{n+1}{2}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}A^{n+1}\mathrm{e}^{-A^2} + \frac{n+1}{2}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1}\mathrm{e}^{-A^2} = 0$. En faisant tendre $A \to +\infty$, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n.$$

c **Valeurs explicites :**

On connaît $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (partie B) et $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

☞ Pour $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}$), par récurrence :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2}\cdot\frac{2p-3}{2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2p)!}{2^p(2^p p!)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi}.$$

☞ Pour $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$), par récurrence :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2}\cdot\frac{2p-2}{2}\cdots\frac{2}{2}I_1 = p!\cdot\frac{1}{2} = \frac{p!}{2}.$$

2 **Étude de $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x^2}\,\mathrm{d}x$ ($\beta > 0$, $\alpha > -1$) :**

a **Convergence :**

La fonction $x \mapsto x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

☞ **En 0^+ :**
$x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$. Comme $\alpha > -1$, on a $-\alpha < 1$, donc l'intégrale converge en 0 d'après le critère de Riemann.

☞ **En $+\infty$:**
Comme $\beta > 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x^2}) = 0$, donc $x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, ce qui assure la convergence en $+\infty$.

Ainsi, $I(\alpha,\beta)$ est convergente.

b **Lien avec Γ :**

Effectuons le changement de variable $t = \beta x^2$, c'est-à-dire $x = \sqrt{\dfrac{t}{\beta}}$ (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ puisque $\beta > 0$, avec $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{\beta t}}$) :

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{2\beta^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\beta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\beta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

c **Application numérique :**

On reconnait $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^4\mathrm{e}^{-3x^2}\,\mathrm{d}x = I(4,3)$ (avec $\alpha = 4 > -1$ et $\beta = 3 > 0$). D'après la formule précédente :

$$J = \frac{1}{2\cdot 3^{\frac{5}{2}}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Or $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ et $3^{\frac{5}{2}} = 9\sqrt{3}$. D'où :

$$J = \frac{1}{2\cdot 9\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{24\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{72}.$$

FiN