DS : Réduction

Trigonalistion, Diagonalisation & Crochet de Lie

Lundi 16 Novembre 20

Remarques : Le devoir est constitué de deux exercices et un problème.

- L'**Exercice 1** traite la trigonalisation d'une matrice carrée de taille 2, et la résolution de systèmes différentiels comme application.
- L'**Exercice 2** traite la diagonalisation d'une matrice carrée de taille 3, et la résolution du problème de suites imbriquées comme application.
- Le **Problème** traite, en trois parties largement dépendantes,la notion du **Crochet de Lie** (CNS de nilpotence, CNS de diagonalisation, caractérisation de ses noyaux et images).

Conseils :

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dans l'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons de son initiative.
- Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.
- Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Notations : Dans tout le devoir.

- $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$.
- Pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $u.v$ désigne la composée $u \circ v$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in \mathcal{L}(E)$, u^k désigne la composée itérée k-fois : $u \circ \cdots \circ u$.
- $m_\lambda(P)$ désigne la multiplicité d'une racine λ dans un polynôme $P(X)$

Exercice 1

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$.
Montrer que A est diagonalisable $\Leftrightarrow A = \lambda.I_n$.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A).X + \det(A)$.

(3) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

[a] Donner $\chi_A(X)$.

[b] En déduire, sans calcul, que A est trigonalisabale et non diagonalisable.

[c] Pour chaque $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, donner une base de $E_\lambda(A)$, puis en déduire $\dim E_\lambda(A)$.

[d] Trigonaliser A : Donner $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $A = P.T.P^{-1}$.

(4) Résoudre le système : $\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 3y(t) \end{cases}$
Sous les conditions initiales $x(0) = y(0) = 1$.

(5) Résoudre le système : $\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 3y(t) + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$
Sous les conditions initiales $x'(0) = y(0) = 1$

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Sans aucun calcul, dire pourquoi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\text{rg}(A + 3I_3)$.
3. Sans aucun calcul, dire pourquoi $m_{-3}(\chi_A) = 2$ et $\chi_A(X) = X(X+3)^2$.
4. Pour chaque $\lambda \in \text{sp}(A)$, donner une base de $E_\lambda(A)$.
5. Diagonaliser A : Donner $P \in \text{GL}_3(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ diagonale telles que $A = P.D.P^{-1}$.
6. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= -2a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} &= a_n - 2b_n + c_n \\ c_{n+1} &= a_n + b_n - 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}.X_n$. On a $X_{n+1} = A.X_n$.

- **a** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n.X_0$.
- **b** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Y_n = D^n.Y_0$.
- **c** On pose $Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n, α, β et γ.

7. On pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \text{ tel que } A.M = M.A\}$ (le sev **commutant** de A).
   - **a** Montrer que $M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow N = P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$.
   - **b** En déduire alors la forme de N.
   - **c** Donner une base $\mathcal{C}(D)$.
   - **d** En déduire que $\dim \mathcal{C}(A) = 5$.

Problème

Notations : Dans tout le problème.

- ☞ Pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, on pose :
  Crochet de Lie de u et v : $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.
- ☞ Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :
  Crochet de Lie de A et B : $[A, B] = AB - BA$.

Partie A : Nilpotence du Crochet de Lie (CNS)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixé, mais quelconque
   - **a** Montrer l'application $\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & [A, M] \end{array}$ est linéaire, non injective.
   - **b** Justifier que si $N \in \text{Im}(\Phi_A)$, alors $\text{Tr}(N) = 0$.
   - **c** En déduire que Φ_A n'est pas surjective.
2. Soit $\lambda, \mu \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ fixées, mais quelconque.
   - **a** Justifier rigoureusement que $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A^T) = \text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
   - **b** En déduire l'existence de deux colonnes non nulles $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que $A.X = \lambda.X$ et $A^T.Y = \mu.Y$.
   - **c** On pose $M = X.Y^T$. Montrer que $\text{rg}(M) = 1$. En déduire que $M \neq 0$.
   - **d** Vérifier que $\Phi_A(M) = (\lambda - \mu)M$.
   - **e** En déduire que $\lambda - \mu \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_A)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixé, mais quelconque.
   On pose $L_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & A.M \end{array}$ et $R_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M.A \end{array}$
   - **a** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $(L_A)^k(M) = A^k.M$.
   - **b** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $(R_A)^k(M) = M.A^k$.
   - **c** Montrer que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $(R_A \circ L_A)(M) = (L_A \circ M_A)(M)$.

d En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$(\Phi_A)^p(M) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} A^k.M.A^{p-k}$$

4. On suppose que A est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$: $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
Montrer que $(\Phi_A)^{2p-1}(M) = 0$, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$.
Autrement dit : Si A est nilpotente, alors Φ_A est aussi nilpotente.

5. Montrer à l'aide d'un exemple, que la réciproque n'est pas toujours vraie.

6. On suppose que Φ_A est nilpotente.

a Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda\}$.

☞ **Indication** : On pourra utiliser la question 2.e) de la Partie 1.

b En déduire que $\exists N \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotente et non nulle telle que $A = N + \lambda.I_n$.

7. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on a : $\Phi_{A+B}(M) = \Phi_A(M) + \Phi_B(M)$.

8. En déduire que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a :
Φ_A est nilpotente $\Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotente non nulle et $\lambda \in \mathbb{K}$ telles que $A = N + \lambda.I_n$.

Partie B : Diagonalisation du Crochet de Lie (CNS)

Dans cette partie on suppose $n \geqslant 2$.
N.B : Citer soigneusement un cours signifie :

☞ Énoncer ce résultat en détail : ses hypothèses et conclusions.

☞ Justifier que les hypothèses de ce résultat sont bien vérifiées dans votre situation.

1. Dans cette question on suppose que u est diagonalisable :
On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, où des valeurs propres λ_i de u peuvent être parfois égales, et donc comptées autant de fois que leurs multiplicité dans $\chi_u(X)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u.
Autrement dit : $u(e_i) = \lambda e_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
Pour tout $(i, j, k) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^3$, on définit $u_{i,j} \in \mathcal{L}(E)$ par la relation $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}.e_i$.
$\delta_{j,k}$ désigne le symbole de Kronecker défini par la relation suivante $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, $= 0$ si $j \neq k$

a Montrer que l'application $u_{i,j}$ est bien définie.

b Montrer que $\Phi_u(u_{i,j})(e_k) = (\lambda_i - \lambda_j)u_{i,j}(e_k)$, pour tout $(i, j, k) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^3$.

c En déduire que $\Phi_u(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)u_{i,j}$, pour tout $(i, j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$.

d Montrer que $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

e En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\mathrm{sp}(\Phi_u)$.

2. On suppose dans cette question que Φ_u et diagonalisable et que $\mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(u) \neq \varnothing$.
Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n^2\}$.
Soit enfin $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(u)$ et $x_1 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x_1) = \lambda.x_1$.

a Exprimer $u(v_i(x_1))$ en fonction de λ, β_i et $v_i(x_1)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$.

b Montrer que l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & E \\ v & \mapsto & v(x_1) \end{array}$ est linéaire.

c Justifier l'existence de $(x_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ tel que $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ soit une base de E.
Citer soigneusement le résultat du cours utilisé.

d Soit $y \in E$, fixé mais quelconque.
On définit $v \in \mathcal{L}(E)$ comme suit : $v(x_1) = y$ et $v(x_i) = 0_E$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
Montrer que v est bien définie. Citer soigneusement le résultat du cours utilisé.

e En déduire que ψ surjective.

f En déduire que $(v_i(x_1))_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$ est une famille génératrice de E.
Citer soigneusement le résultat du cours utilisé.

g En déduire qu'il existe $I \subset \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ tel que $(v_i(x_1))_{i \in I}$ est une base de E.
Citer soigneusement le résultat du cours utilisé.

h En déduire alors que u est diagonalisable.

i Exprimer les $\mu \in \mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(u)$ en fonction de λ et des $(\alpha_i)_{i \in I}$.

3. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors Φ_u est diagonalisable $\Leftrightarrow u$ est diagonalisable.

4. Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donne une condition nécessaire pour que Φ_u soit diagonalisable.

Partie C : Images du Crochet de Lie

(1) **Lemme de Schur** : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, v(x))$ est liée, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$.

[a] Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $v(x) = \lambda_x \cdot x$.

[b] Montrer que $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$, on a : $\lambda_x = \lambda_y$.

☞ **Indication** : On pourra étudier les cas : $\{x, y\}$ libre et $\{x, y\}$ liée.

[c] En déduire que v est une homothétie de E, i.e : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda \mathrm{Id}_E$.

(2) Justifier que $N \in \bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A) \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $N = [A, B]$.

(3) Peut-on affirmer que $\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$ est un $\mathbb{K}$-sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(4) Soit $N \in \bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$, montrer que $\mathrm{Tr}(N) = 0$.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque est vraie.
Plus précisément, on se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$(\mathcal{P}_n) : \forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(N) = 0 \Rightarrow \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } N = [A, B].$$

(5) Montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai pour $n = 1$.
Dans le suite, on suppose que $(\mathcal{P}_n)$ vrai, et se propose de montrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ vrai.
On fixe $N \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{Tr}(N) = 0$ et on cherche
$(A, B) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})^2$ tel que $N = [A, B]$.

(6) Dire pourquoi $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai pour $N = 0$.
On suppose dans le suite que $N \neq 0$.

(7) Dire pourquoi N ne peut pas s'écrire sous la forme $N = \lambda . I_{n+1}$.

(8) Dans la suite on considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1})$ canoniquement associé à N.
Autrement dit $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, où $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Selon la question précédente u ne peut pas s'écrire sous la forme $u = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}}$.
Justifier alors l'existence de $x_1 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $(x_1, u(x_1))$ est libre.

(9) En déduire l'existence de $(x_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$, tel que $x_2 = u(x_1)$ et que
$\mathcal{C} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base de $\mathbb{K}^{n+1}$. Citer soigneusement le résultat du cours utilisé.

(10) En déduire que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)$ est de la forme $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ Y_1 & N_1 \end{pmatrix}$, où $X_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$,

$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $N_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(11) Dire pourquoi $\mathrm{Tr}(N_1) = 0$. En déduire que $\exists (A_1, B_1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $N_1 = [A_1, B_1]$.

(12) On pose $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & A_1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ S & B_1 \end{pmatrix}$,
où $\alpha \notin \mathrm{sp}(A_1)$, $R, S \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconques.

[a] Calculer le crochet de Lie $[A_2, B_2]$.

[b] En déduire l'expression de R et S pour que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = [A_2, B_2]$.

(13) Dire pourquoi N est semblable à $[A_2, B_2]$.

(14) Montrer que toute matrice semblable à un crochet de Lie est aussi un crochet de Lie.

(15) En déduire que $\exists (A, B) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que $N = [A, B]$.

(16) Justifier rigoureusement et soigneusement le résultat suivant : **Théorème de Shoda**
Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(N) = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $N = [A, B]$.

(17) Justifier maintenant que $\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$ est un $\mathbb{K}$-sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Préciser sa dimension.

FiN

BoNNe CHanCE

Corrigé

Exercice 1

1 ☞ **Sens** ($\Leftarrow$) **:** Si $A = \lambda I_n$, alors A est une matrice diagonale, donc elle est trivialement diagonalisable.

☞ **Sens** ($\Rightarrow$) **:** Supposons que A est diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Puisque $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X-\lambda)^n$, l'unique valeur propre de A (et de D) est λ. Une matrice diagonale n'ayant que λ comme coefficient diagonal est nécessairement $D = \lambda I_n$. Par conséquent :

$$A = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n$$

2 Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Par définition du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - (-b)(-c)$$

En développant :

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$$

Or $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$. Ainsi :

$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$$

3 **a** On a $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 3 = 4$ et $\det(A) = 1 \times 3 - 1 \times (-1) = 4$. D'après la question 2 :

$$\chi_A(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$$

b ☞ Le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-2)^2$ est scindé sur $\mathbb{K}$, donc A est **trigonalisable**.

☞ D'après la question 1, si A était diagonalisable avec $\chi_A(X) = (X-2)^2$, on aurait $A = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $A \neq 2I_2$, A n'est **pas diagonalisable**.

c L'unique valeur propre est $\lambda = 2$. Le sous-espace propre associé est $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_2)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$:

$$(A-2I_2)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y = 0 \iff y = x$$

Ainsi $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{K} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Une base de $E_2(A)$ est la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, et $\dim E_2(A) = 1$.

d Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vecteur propre associé à 2) et choisissons $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de telle sorte que (e_1, e_2) forme une base de $\mathbb{K}^2$. Calculons Ae_2 :

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + 2e_2$$

Ainsi, la matrice de l'endomorphisme dans la base (e_1, e_2) est $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, et on a $A = PTP^{-1}$.

4 ☞ Changement de variable dans la base de trigonalisation :

Posons $X(t) = PY(t)$ avec $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ issues de la question 3.d. Le système s'écrit $PY'(t) = APY(t)$, d'où $Y'(t) = P^{-1}APY(t) = TY(t)$.

Calculons la condition initiale pour $Y(t)$:

$$Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système scalaire triangulaire sur $Y(t)$ s'écrit :

$$\begin{cases} u'(t) = 2u(t) - v(t) & (1) \\ v'(t) = 2v(t) & (2) \end{cases}$$

☞ Résolution de l'équation (2) pour $v(t)$:
L'équation $v'(t) = 2v(t)$ avec $v(0) = 0$ donne immédiatement :

$$v(t) = 0$$

☞ Résolution de l'équation (1) pour $u(t)$:
En injectant $v(t) = 0$ dans l'équation (1), on obtient $u'(t) = 2u(t)$ avec $u(0) = 1$, d'où :

$$u(t) = \mathrm{e}^{2t}$$

☞ Retour aux variables d'origine $X(t) = PY(t)$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

La solution unique du système homogène est donc :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

5 Le système avec second membre s'écrit $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$.

☞ Détermination de la condition initiale $x(0)$:
La seconde équation évaluée en $t = 0$ donne :

$$y'(0) = -x(0) + 3y(0) + \mathrm{e}^0 \implies y'(0) = -x(0) + 3(1) + 1 = 4 - x(0)$$

D'autre part, la première équation donne $x'(0) = x(0) + y(0) = x(0) + 1$. Comme l'énoncé indique $x'(0) = 1$, on a $x(0) + 1 = 1 \implies x(0) = 0$. La condition initiale vectorielle est donc $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

☞ Résolution par changement de variable dans la base de trigonalisation :
Posons $X(t) = PY(t)$ avec $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Le système devient $Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$. Calculons P^{-1} : comme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\det(P) = -1$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Le second membre transformé est :

$$P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

Et la condition initiale pour Y est :

$$Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le système scalaire triangulaire sur $Y(t)$ s'écrit :

$$\begin{cases} u'(t) = 2u(t) - v(t) + \mathrm{e}^{-t} & (1) \\ v'(t) = 2v(t) - \mathrm{e}^{-t} & (2) \end{cases}$$

☞ Résolution de l'équation (2) pour $v(t)$:
L'équation $v'(t) - 2v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ avec $v(0) = -1$ a pour solution :

$$v(t) = \left(v(0) + \int_0^t -\mathrm{e}^{-s}\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{d}s \right) \mathrm{e}^{2t} = \left(-1 + \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3s} \right]_0^t \right) \mathrm{e}^{2t} = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}$$

☞ Résolution de l'équation (1) pour $u(t)$:
En remplaçant $v(t)$ dans (1) :

$$u'(t) - 2u(t) = -v(t) + \mathrm{e}^{-t} = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}$$

Avec la condition initiale $u(0) = 1$:

$$u(t) = \mathrm{e}^{2t} \left(u(0) + \int_0^t \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3s} \right) \mathrm{d}s \right) = \mathrm{e}^{2t} \left(1 + \frac{4}{3}t + \left[-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3s} \right]_0^t \right)$$

$$u(t) = \mathrm{e}^{2t} \left(\frac{11}{9} + \frac{4}{3}t - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3t} \right) = \left(\frac{11}{9} + \frac{4}{3}t \right) \mathrm{e}^{2t} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-t}$$

☞ Retour aux variables d'origine $X(t) = PY(t)$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t)+v(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$x(t) = u(t)+v(t) = \left(\frac{11}{9} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}t\right)\mathrm{e}^{2t} + \left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-t} = \left(-\frac{1}{9} + \frac{4}{3}t\right)\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-t}$$

$$y(t) = u(t) = \left(\frac{11}{9} + \frac{4}{3}t\right)\mathrm{e}^{2t} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-t}$$

La solution unique du système différentiel est donc :

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{4}{3}t - \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = \left(\frac{4}{3}t + \frac{11}{9}\right)\mathrm{e}^{2t} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Exercice 2

(1) La matrice A est réelle et égale à sa transposée ($A^T = A$). D'après le **théorème spectral**, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

(2)

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois colonnes de $A+3I_3$ sont identiques et non nulles (chacune étant égale au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Par conséquent, la famille des colonnes est de rang 1, d'où :

$$\mathrm{rg}(A + 3I_3) = 1$$

(3) ☞ Puisque $\mathrm{rg}(A - (-3)I_3) = \mathrm{rg}(A + 3I_3) = 1$, le théorème du rang donne :

$$\dim E_{-3}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A + 3I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A + 3I_3) = 3 - 1 = 2$$

La matrice A étant diagonalisable, la multiplicité d'une valeur propre dans le polynôme caractéristique est égale à la dimension du sous-espace propre associé. Ainsi :

$$m_{-3}(\chi_A) = \dim E_{-3}(A) = 2$$

☞ Le polynôme caractéristique de A est unitaire de degré 3 et s'écrit sous la forme $\chi_A(X) = (X+3)^2(X-\lambda)$. De plus, la somme des racines comptées avec multiplicité est égale à la trace de la matrice A :

$$\mathrm{Tr}(A) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$$

D'autre part, $\mathrm{Tr}(A) = (-3) + (-3) + \lambda = -6 + \lambda$. On en déduit immédiatement $\lambda = 0$. Ainsi :

$$\chi_A(X) = X(X+3)^2$$

(4) ☞ Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $E_{-3}(A)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x+y+z = 0 \iff z = -x-y$$

Ainsi $E_{-3}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Une base de $E_{-3}(A)$ est $\mathcal{B}_{-3} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

☞ Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Ainsi $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Une base de $E_0(A)$ est $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

5 Selon les calculs de la question précédente, on a $A = P.D.P^{-1}$,
avec $D = \text{diag}(-3,-3,0)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6 **a** Montrons cette relation par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- **Initialisation ($n = 0$) :** $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$, la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** Supposons $X_n = A^n X_0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
  Alors $X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$.
  La propriété est vraie au rang $n+1$.

Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

b Comme $A = PDP^{-1}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En multipliant $X_n = A^n X_0$ à gauche par P^{-1}, on obtient :

$$Y_n = P^{-1}X_n = P^{-1}(PD^nP^{-1})X_0 = D^n(P^{-1}X_0) = D^nY_0$$

c Comme $D = \text{diag}(-3,-3,0)$, on a $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$ (avec $0^0 = 1$ pour $n = 0$). Pour tout $n \geq 1$:

$$Y_n = D^nY_0 = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(-3)^n \\ \beta(-3)^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit $X_n = PY_n$:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(-3)^n \\ \beta(-3)^n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(-3)^n \\ \beta(-3)^n \\ -(\alpha+\beta)(-3)^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{cases} a_n = \alpha(-3)^n \\ b_n = \beta(-3)^n \\ c_n = -(\alpha+\beta)(-3)^n \end{cases}$$

7 **On pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.**

a **Montrons que $M \in \mathcal{C}(A) \iff N = P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$.**
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $N = P^{-1}MP$, de sorte que $M = PNP^{-1}$.

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff (PDP^{-1})(PNP^{-1}) = (PNP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &\iff P(DN)P^{-1} = P(ND)P^{-1} \end{aligned}$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient :

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff DN = ND \iff N \in \mathcal{C}(D)$$

b **Déduisons la forme de $N = P^{-1}MP$.**
Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Calculons DN et ND avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$DN = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3d & -3e & -3f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ND = \begin{pmatrix} -3a & -3b & 0 \\ -3d & -3e & 0 \\ -3g & -3h & 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité $DN = ND$ impose $-3c = 0$, $-3f = 0$, $-3g = 0$ et $-3h = 0$, soit $c = f = g = h = 0$. Ainsi, N s'écrit de manière diagonale par blocs :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

c **Déduisons une base de $\mathcal{C}(D)$.**
Selon la question précédente, une base de $\mathcal{C}(D)$ est constituée des 5 matrices élémentaires $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$. On en déduit : $\dim \mathcal{C}(A) = 5$

d **Déduisons $\mathcal{C}(A) = 5$.**
L'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A) & \to & \mathcal{C}(D) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$ est un automorphisme d'espaces vectoriels de dimensions finies. Ainsi $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(D)$.

Partie A : Nilpotence du Crochet de Lie (CNS)

1 **a** ☞ **Linéarité :** Pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous scalaires α, β :

$$\begin{aligned}\Phi_A(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A \\ &= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) \\ &= \alpha\Phi_A(M) + \beta\Phi_A(N)\end{aligned}$$

L'application est donc linéaire.

☞ **Non injectivité :** Considérons la matrice identité I_n.
On a $\Phi_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
Comme $I_n \neq 0$, le noyau $\ker(\Phi_A)$ contient au moins I_n (ainsi que toutes les matrices scalaires), donc Φ_A n'est pas injective.

b Soit $N \in \mathrm{Im}(\Phi_A)$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $N = AM - MA$. En appliquant la trace et en utilisant la propriété $\mathrm{Tr}(UV) = \mathrm{Tr}(VU)$, on obtient :

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(AM - MA) = \mathrm{Tr}(AM) - \mathrm{Tr}(MA) = \mathrm{Tr}(AM) - \mathrm{Tr}(AM) = 0$$

c Si Φ_A était surjective, on aurait $\mathrm{Im}(\Phi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or, toute matrice N de l'image a une trace nulle, ce qui est faux pour la matrice identité I_n (car $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$ si $n \geq 1$). Par conséquent, Φ_A n'est pas surjective.

2 **a** Le polynôme caractéristique est invariant par transposition car $\det(XI_n - A^T) = \det((XI_n - A)^T) = \det(XI_n - A)$.
Ainsi $\chi_{A^T}(X) = \chi_A(X)$, ce qui signifie que A et A^T ont le même spectre : $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A^T) = \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

b Puisque $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A.X = \lambda.X$. De même, $\mu \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A^T)$, donc il existe un vecteur colonne non nul $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^T.Y = \mu.Y$.

c Soient deux vecteurs colonnes non nuls :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

La transposée de Y est la ligne :

$$Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$$

Le calcul des coefficients de XY^T, donne :

$$XY^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de XY^T Si l'on factorise chaque colonne par le coefficient y_j correspondant, on remarque que $C_j = y_jX$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
Puisque le vecteur X est non nul, et que la famille des colonnes de XY^T est engendrée par X, alorsrg$(XY^T) = 1$, en particulier $XY^T \neq 0$, car $\mathrm{rg}(XY^T) \neq 0$.

d Calculons $\Phi_A(M)$:

$$\Phi_A(M) = A(XY^T) - (XY^T)A = (AX)Y^T - X(A^TY)^T$$

En remplaçant par $AX = \lambda X$ et $A^TY = \mu Y$:

$$\Phi_A(M) = (\lambda X)Y^T - X(\mu Y)^T = \lambda(XY^T) - \mu(XY^T) = (\lambda - \mu)(XY^T) = (\lambda - \mu)M$$

e Puisque $M \neq 0$, cette relation montre que $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A associée au vecteur propre non nul M. Ainsi, $\lambda - \mu \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_A)$.

3 **a** Récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

☞ Pour $k = 0$, $(L_A)^0 = \mathrm{Id}$ et $A^0.M = I_n.M = M$. C'est vrai.

☞ Supposons la propriété vraie au rang k : $(L_A)^k(M) = A^kM$.

☞ Au rang $k+1$: $(L_A)^{k+1}(M) = L_A((L_A)^k(M)) = L_A(A^kM) = A(A^kM) = (A^{k+1})M$. La propriété est démontrée.

b Récurrence similaire pour R_A : $(R_A)^k(M) = MA^k$ (en remarquant que $R_A(MA^k) = (MA^k)A = MA^{k+1}$).

c Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}(R_A \circ L_A)(M) &= R_A(L_A(M)) \\ &= R_A(AM) \\ &= (AM)A \\ &= A(MA) \\ &= L_A(MA) \\ &= (L_A \circ R_A)(M)\end{aligned}$$

Ainsi, $R_A \circ L_A = L_A \circ R_A$, ce qui signifie que les endomorphismes de multiplication à gauche et à droite commutent.

d Puisque L_A et $-R_A$ commutent, on applique la formule du binôme de Newton pour les endomorphismes :

$$\begin{aligned}(\Phi_A)^p &= (L_A - R_A)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (L_A)^k \circ (-R_A)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} (L_A)^{p-k} \circ (R_A)^k\end{aligned}$$

En appliquant cette identité d'endomorphismes à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et en utilisant le fait que $(L_A)^m(X) = A^m X$ et $(R_A)^k(X) = XA^k$, on obtient :

$$\left((L_A)^{p-k} \circ (R_A)^k\right)(M) = (L_A)^{p-k}(MA^k) = A^{p-k}MA^k$$

En injectant cette relation dans la somme :

$$(\Phi_A)^p(M) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} A^k M A^{p-k}$$

4 Si A est nilpotente d'indice p, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq p$ ou $2p-1-k \geq p$, l'un des termes A^k ou A^{2p-1-k} est nul. Dans la somme de la formule précédente au rang $2p-1$, chaque terme de la somme possède un exposant total égal à $(k) + (2p-1-k) = 2p-1$. Puisque $2p-1 = p+(p-1)$, soit $k \geq p$, soit $2p-1-k \geq p$. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls, ce qui implique $(\Phi_A)^{2p-1}(M) = 0$. Φ_A est donc nilpotente.

5 **Contre-exemple de la réciproque :**
Considérons une matrice scalaire non nulle $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \neq 0$. Alors $\Phi_A(M) = (\lambda I_n)M - M(\lambda I_n) = \lambda M - \lambda M = 0$ pour toute matrice M. L'endomorphisme Φ_A est donc nul (donc nilpotent d'indice 1), alors que A n'est pas nilpotente (car $\lambda I_n \neq 0$).

6 **a** Supposons Φ_A nilpotente. Soit $\lambda, \mu \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$. D'après la question 2.e de l'exercice précédent, on sait que $\lambda - \mu \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_A)$. Or, le spectre d'un endomorphisme nilpotent se réduit à $\{0\}$. Par conséquent, $\lambda - \mu = 0$, soit $\lambda = \mu$. Toutes les valeurs propres complexes de A sont donc égales à une unique valeur λ, d'où $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda\}$.

b Puisque $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda\}$, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-\lambda)^n$. Par le théorème de Hamilton-Cayley, $(A - \lambda I_n)^n = 0$. En posant $N = A - \lambda I_n$, on a bien $N^n = 0$ (N est nilpotente) et $A = N + \lambda I_n$.

7 Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}\Phi_{A+B}(M) &= (A+B)M - M(A+B) \\ &= AM + BM - MA - MB \\ &= (AM - MA) + (BM - MB) \\ &= \Phi_A(M) + \Phi_B(M)\end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi_{A+B} = \Phi_A + \Phi_B$.

8 ☞ Si Φ_A est nilpotente, d'après la question 6.b, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et N nilpotente telle que $A = N + \lambda I_n$.

☞ Si $A = N + \lambda I_n$ avec N nilpotente, alors d'après la question 7, on a :
$\Phi_A = \Phi_N + \Phi_{\lambda I_n} = \Phi_N$. Puisque N est nilpotente, Φ_N l'est également (d'après la question 4), donc Φ_A est nilpotente.

Partie B : Diagonalisation du Crochet de Lie (CNS)

1 **a** L'espace E admet pour base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. D'après le théorème de définition d'une application linéaire par l'image d'une base, l'application $u_{i,j}$ est parfaitement et uniquement déterminée par la donnée des images de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$. Elle est donc bien définie.

b Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculons l'image par $\Phi_u(u_{i,j})$ du vecteur e_k :

$$(u \circ u_{i,j} - u_{i,j} \circ u)(e_k) = u(u_{i,j}(e_k)) - u_{i,j}(u(e_k))$$

Puisque $u(e_k) = \lambda_k e_k$ et que $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$, alors :

$$\begin{aligned}\Phi_u(u_{i,j})(e_k) &= u(\delta_{j,k}e_i) - u_{i,j}(\lambda_k e_k)\\ &= \delta_{j,k}u(e_i) - \lambda_k u_{i,j}(e_k)\\ &= \delta_{j,k}\lambda_i e_i - \lambda_k \delta_{j,k} e_i\\ &= (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{j,k}e_i\end{aligned}$$

Or, comme $\delta_{j,k} \neq 0$ seulement si $k = j$, on a $\lambda_k \delta_{j,k} = \lambda_j \delta_{j,k}$. Ainsi :

$$\Phi_u(u_{i,j})(e_k) = (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{j,k}e_i = (\lambda_i - \lambda_j)u_{i,j}(e_k)$$

c Puisque l'égalité précédente est vraie pour tout vecteur de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, donc :

$$\Phi_u(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)u_{i,j}$$

d Soit une combinaison linéaire nulle : $\sum_{1\leq i,j\leq n} \alpha_{i,j}u_{i,j} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Appliquons cet endomorphisme au vecteur de base e_k (pour un k fixé dans $[\![1, n]\!]$) :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}u_{i,j}(e_k) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}e_i = 0_E$$

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base (donc libre), tous ses coefficients sont nuls : pour tout i, $\alpha_{i,k} = 0$. Ceci étant vrai pour tout k, tous les $\alpha_{i,j}$ sont nuls. La famille $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est donc libre.

e On dispose ainsi de n^2 vecteurs $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ qui sont des vecteurs propres de Φ_u (car $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$). Cette famille libre de cardinal n^2 forme une base de $\mathcal{L}(E)$. Par conséquent, Φ_u est diagonalisable, et son spectre est :

$$\mathrm{sp}(\Phi_u) = \{\lambda_i - \lambda_j \mid (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\}.$$

2 **a** Calculons $\Phi_u(v_i)(x_1)$ de deux manières.
D'une part, $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$, donc $\Phi_u(v_i)(x_1) = \beta_i v_i(x_1)$.
D'autre part :

$$(u\circ v_i - v_i \circ u)(x_1) = u(v_i(x_1)) - v_i(u(x_1)) = u(v_i(x_1)) - v_i(\lambda x_1) = u(v_i(x_1)) - \lambda v_i(x_1)$$

En égalant les deux expressions : $u(v_i(x_1)) - \lambda v_i(x_1) = \beta_i v_i(x_1)$, soit :

$$u(v_i(x_1)) = (\lambda + \beta_i)v_i(x_1)$$

b Pour tous $v, w \in \mathcal{L}(E)$ et tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :
$\psi(\alpha v + \beta w) = (\alpha v + \beta w)(x_1) = \alpha v(x_1) + \beta w(x_1) = \alpha\psi(v) + \beta\psi(w)$.
L'application ψ est donc linéaire.

c Puisque $x_1 \neq 0_E$, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (x_1) en une base $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'espace E.

d D'après les théorèmes généraux sur les applications linéaires : un endomorphisme est bien définie à partir de ses images sur les éléments d'une base de E
Dans notre cas : $\mathcal{B} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et les formules $v(x_1) = y$ et $v(x_i) = 0_E$ pour tout $i \geq 2$, montrent que l'endomorphisme v est donc bien défini.

e Soit $y \in E$ quelconque. En construisant l'endomorphisme v tel que
$v(x_1) = y$ et $v(x_i) = 0$ pour $i \geq 2$, on a $\psi(v) = v(x_1) = y$.
Tout vecteur de E admet ainsi un antécédent par ψ, donc ψ est surjective.

f On sait que les applications linéaires surjective transforme toute base de l'ev de départ en une famille génératrice de l'ev d'arrivée.
L'application linéaire $\psi : \mathcal{L}(E) \to E$ est surjective, ce qui implique que l'image de toute base de son espace de départ engendre son espace d'arrivée.
Ainsi, la famille des images de la base $(v_i)_{1\leq i\leq n^2}$, c'est-à-dire $(v_i(x_1))_{1\leq i\leq n^2}$, forme une famille génératrice de E.

g D'après le théorème de la base extraite : De toute famille génératrice, on peut extraire une base. Il existe donc une sous-famille $(v_i(x_1))_{i\in I}$ (avec $I \subset [\![1, n^2]\!]$) qui forme une base de E et $\mathrm{card(I)} = \dim \mathrm{E} = \mathrm{n}$.

h D'après la question 2.a, pour tout $i \in I$, le vecteur $v_i(x_1)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda_i = \lambda + \beta_i$. Comme $(v_i(x_1))_{i\in I}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u, l'endomorphisme u est diagonalisable.

i Les valeurs propres de u ainsi obtenues s'expriment par $\mu_i = \lambda + \beta_i$ pour $i \in I$, où β_i sont les valeurs propres de Φ_u associées aux vecteurs v_i.

3 Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le résultat des questions 1 et 2 démontre l'équivalence parfaite : Φ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

4 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que Φ_u est diagonalisable, alors le polynôme caractéristique de Φ_u est scindé sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathrm{sp}(\Phi_u)$ dépend des différences de valeurs propres de u, une condition nécessaire pour que Φ_u soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$ est que toutes les valeurs propres complexes de u dont les différences engendrent le spectre de Φ_u soient effectivement réelles, ce qui implique en particulier que le spectre de u doit être inclus dans $\mathbb{R}$ (donc χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$).

Partie C : Images du Crochet de Lie

1 **a** **Montrons que** $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ **tel que** $v(x) = \lambda_x \cdot x$.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Par hypothèse, la famille $(x, v(x))$ est liée dans E. Comme $x \neq 0_E$, la sous-famille (x) est libre. Une famille de deux vecteurs dont le premier est non nul est liée si et seulement si le second est combinaison linéaire du premier. Par conséquent, il existe un scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que :

$$v(x) = \lambda_x \cdot x.$$

b **Montrons que** $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$, $\lambda_x = \lambda_y$.
Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$. Distinguons deux cas selon la liberté de la famille (x, y) :

☞ **1er cas : La famille** (x, y) **est libre.** Considérons le vecteur $z = x + y$. Comme x et y sont libres, $z \neq 0_E$. D'après la question **1.a**, il existe $\lambda_z \in \mathbb{K}$ tel que $v(z) = \lambda_z \cdot z$. Par linéarité de v, on obtient :

$$v(z) = v(x + y) = v(x) + v(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

D'autre part :

$$v(z) = \lambda_z(x + y) = \lambda_z x + \lambda_z y.$$

On en déduit la relation :

$$(\lambda_x - \lambda_z)x + (\lambda_y - \lambda_z)y = 0_E.$$

Puisque la famille (x, y) est libre dans E, tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls :

$$\lambda_x - \lambda_z = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_y - \lambda_z = 0,$$

ce qui donne immédiatement $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$.

☞ **2e cas : La famille** (x, y) **est liée.** Puisque $x \neq 0_E$ et $y \neq 0_E$, il existe un scalaire $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$. Par linéarité de v :

$$v(y) = v(\mu x) = \mu v(x) = \mu(\lambda_x x) = \lambda_x(\mu x) = \lambda_x y.$$

Or, par définition de λ_y, on a aussi $v(y) = \lambda_y y$. Puisque $y \neq 0_E$, l'unicité du coefficient de colinéarité impose $\lambda_x = \lambda_y$.

Dans tous les cas, on a bien $\lambda_x = \lambda_y$ pour tout couple (x, y) de vecteurs non nuls.

c **Déduisons que** v **est une homothétie de** E**, i.e.** $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ **tel que** $v = \lambda \mathrm{Id}_E$.
D'après la question précédente, l'application $x \mapsto \lambda_x$ est constante sur $E \setminus \{0_E\}$. Notons $\lambda \in \mathbb{K}$ cette valeur constante.

☞ Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $v(x) = \lambda x = (\lambda \mathrm{Id}_E)(x)$.
☞ Pour $x = 0_E$, $v(0_E) = 0_E = \lambda \cdot 0_E = (\lambda \mathrm{Id}_E)(0_E)$ par linéarité.

Par conséquent, $v = \lambda \mathrm{Id}_E$, ce qui prouve que v est une homothétie vectorielle.

2 **Justifions que** $N \in \bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A) \iff \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ **tel que** $N = [A, B]$.

Par définition :

$$\begin{aligned} N \in \bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A) &\iff \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ N \in \mathrm{Im}(\Phi_A) \\ &\iff \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ N = \Phi_A(B) \\ &\iff \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ N = [A, B]. \end{aligned}$$

3 **Peut-on affirmer que** $\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$ **est un** $\mathbb{K}$**-sev de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **?**

A priori, non, car la réunion de sev n'est pas toujours un sev, mais éventuellement oui, car parfois ça peut l'être. Donc, finalement, on ne pet rien dire.

4 **Soit** $N \in \bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$**, montrons que** $\mathrm{Tr}(N) = 0$.

Soit $N \in \bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$. D'après la question précédente, il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $N = [A, B] = AB - BA$. Par linéarité de la trace :

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA).$$

Or, d'après la propriété : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en conclut que $\mathrm{Tr}(N) = 0$.

5 **Montrons que** $(\mathcal{P}_1)$ **est vraie.**

Pour $n = 1$, $\mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$. Soit $N = (n_{1,1}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{Tr}(N) = 0$, alors $n_{1,1} = 0$, donc $N = (0)$. En choisissant $A = (0)$ et $B = (0)$, on a $[A, B] = (0)(0) - (0)(0) = (0) = N$. L'assertion $(\mathcal{P}_1)$ est donc trivialement vérifiée.

6 **Pourquoi $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie pour $N = 0_{\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})}$.**
Si $N = 0_{\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})}$, on a manifestement $\mathrm{Tr}(N) = 0$. En choisissant $A = B = 0_{\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})}$, on obtient :

$$[A, B] = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 = N.$$

N s'écrit donc bien sous forme d'un crochet de Lie.

Si $N = 0_{\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})}$, on a manifestement $\mathrm{Tr}(N) = 0$. En choisissant $A = B = 0_{\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})}$, on obtient :

$$[A, B] = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 = N.$$

N s'écrit donc bien sous forme d'un crochet de Lie.

7 **Pourquoi N ne peut pas s'écrire sous la forme $N = \lambda I_{n+1}$ avec $\lambda \neq 0$.**
Supposons que $N = \lambda I_{n+1}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. La trace de N vaut alors :

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(\lambda I_{n+1}) = \lambda \mathrm{Tr}(I_{n+1}) = (n+1)\lambda.$$

Puisque par hypothèse $\mathrm{Tr}(N) = 0$ et que caractéristique$(\mathbb{K}) = 0$ (ou $n+1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$), on a $(n+1)\lambda = 0 \implies \lambda = 0$.
Ainsi, si $N \neq 0$, N ne peut absolument pas être une matrice homothétique (scalaire).

8 **Justifions l'existence de $x_1 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $(x_1, u(x_1))$ est une famille libre.**
Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, la famille $(x, u(x))$ soit liée.
D'après le Lemme de Schur démontré à la question 1, l'endomorphisme u serait une homothétie vectorielle, c'est-à-dire qu'il existerait $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}}$. Dans la base canonique, la matrice associée serait $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \lambda I_{n+1}$.
Or, la question 7 montre que N ne peut pas être de cette forme puisque $N \neq 0$ et $\mathrm{Tr}(N) = 0$.
Par contradiction, il existe nécessairement au moins un vecteur $x_1 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que la famille $(x_1, u(x_1))$ soit libre.

9 **Déduisons l'existence de $(x_i)_{2 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $x_2 = u(x_1)$ et $\mathcal{C} = (x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ soit une base de $\mathbb{K}^{n+1}$.**
Posons $x_2 = u(x_1)$. D'après la question 8, la famille (x_1, x_2) est libre dans $\mathbb{K}^{n+1}$. D'après le Théorème de la base incomplète :

> *Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie E peut être complétée par des vecteurs d'une base de E pour former une base de E.*

Ici $\dim(\mathbb{K}^{n+1}) = n+1$. La famille libre (x_1, x_2) contient 2 vecteurs. On peut donc la compléter par $n-1$ vecteurs $(x_3, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ pour former une base $\mathcal{C} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.

10 **Déduisons que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)$ est de la forme $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ Y_1 & N_1 \end{pmatrix}$.**
Exprimons les images par u des vecteurs de la base $\mathcal{C} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ en fonction de cette même base :

☞ Pour le premier vecteur x_1 :

$$u(x_1) = x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_{n+1}.$$

La première colonne de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)$ s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En décomposant la matrice par blocs avec un premier bloc de taille 1×1 et le second de taille $n \times n$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ Y_1 & N_1 \end{pmatrix}$$

où $X_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $N_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

11 **Déduisons que $\exists (A_1, B_1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $N_1 = [A_1, B_1]$.**
La trace d'un endomorphisme est indépendante de la base choisie. Ainsi :

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)) = \mathrm{Tr}(N) = 0.$$

D'autre part, en utilisant la structure par blocs de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)$:

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)) = 0 + \mathrm{Tr}(N_1) = \mathrm{Tr}(N_1).$$

On en déduit immédiatement que $\mathrm{Tr}(N_1) = 0$.

Comme $N_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{Tr}(N_1) = 0$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ à la matrice N_1. Il existe donc un couple de matrices $(A_1, B_1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que :

$$N_1 = [A_1, B_1] = A_1B_1 - B_1A_1.$$

(12) On pose $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & A_1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ S & B_1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculons le crochet de Lie $[A_2, B_2]$.

Effectuons les produits par blocs :

$$A_2B_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ S & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha R^T \\ A_1S & A_1B_1 \end{pmatrix},$$

$$B_2A_2 = \begin{pmatrix} 0 & R^T \\ S & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R^TA_1 \\ \alpha S & B_1A_1 \end{pmatrix}.$$

Par différence, le crochet de Lie s'écrit :

$$\begin{aligned} [A_2, B_2] &= A_2B_2 - B_2A_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha R^T - R^TA_1 \\ A_1S - \alpha S & A_1B_1 - B_1A_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & R^T(\alpha I_n - A_1) \\ (A_1 - \alpha I_n)S & [A_1, B_1] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & R^T(\alpha I_n - A_1) \\ (A_1 - \alpha I_n)S & N_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Déduisons l'expression de R et S pour que $\mathcal{M}_\mathcal{C}(u) = [A_2, B_2]$.

Rappelons que $\mathcal{M}_\mathcal{C}(u) = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ Y_1 & N_1 \end{pmatrix}$. Par identification coefficient par coefficient avec le résultat de la question 12.a, on obtient :

☞ $(A_1 - \alpha I_n)S = Y_1$.
Puisque $\alpha \notin \mathrm{sp}(A_1)$, la matrice $(A_1 - \alpha I_n)$ est inversible. On en déduit de manière unique :

$$S = (A_1 - \alpha I_n)^{-1}Y_1.$$

☞ $R^T(\alpha I_n - A_1) = X_1 \iff (\alpha I_n - A_1^T)R = X_1^T$.
Comme $\mathrm{sp}(A_1^T) = \mathrm{sp}(A_1)$, $\alpha \notin \mathrm{sp}(A_1^T)$, donc $(\alpha I_n - A_1^T)$ est inversible. En transposant la relation :

$$R^T = X_1(\alpha I_n - A_1)^{-1} \implies R = \left((\alpha I_n - A_1)^{-1}\right)^T X_1^T = (\alpha I_n - A_1^T)^{-1}X_1^T.$$

Avec ces choix de R et S (et n'importe quel scalaire $\alpha \notin \mathrm{sp}(A_1)$), on a bien $\mathcal{M}_\mathcal{C}(u) = [A_2, B_2]$.

(3) Pourquoi N est semblable à $[A_2, B_2]$.

N est la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique $\mathcal{B}$, tandis que $[A_2, B_2] = \mathcal{M}_\mathcal{C}(u)$ est la matrice du même endomorphisme u dans la base $\mathcal{C}$. D'après le formule de changement de base :

$$N = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\,[A_2, B_2]\,P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}^{-1},$$

où $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ est la matrice de passage inversible. Ainsi, N et $[A_2, B_2]$ sont deux matrices semblables.

(4) Montrons que toute matrice semblable à un crochet de Lie est aussi un crochet de Lie.

Soit M une matrice semblable à un crochet de Lie $[A, B]$. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = P[A, B]P^{-1}$. En développant :

$$M = P(AB - BA)P^{-1} = PABP^{-1} - PBAP^{-1}.$$

En insérant l'identité $I_n = P^{-1}P$ au milieu des produits :

$$M = (PAP^{-1})(PBP^{-1}) - (PBP^{-1})(PAP^{-1}) = [PAP^{-1}, PBP^{-1}].$$

En posant $A' = PAP^{-1}$ et $B' = PBP^{-1}$, on constante que $M = [A', B']$.
M est donc bien un crochet de Lie.

(5) Déduisons que $\exists (A, B) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})^2$ tel que $N = [A, B]$.

D'après la question 13, N est semblable à $[A_2, B_2]$. D'après la question 14, toute matrice semblable à un crochet de Lie est elle-même un crochet de Lie. Par conséquent, N est un crochet de Lie dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$: il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})^2$ tel que $N = [A, B]$. Ceci achève la démonstration de l'étape d'hérédité $(\mathcal{P}_{n+1})$.

(6) Justifions rigoureusement et soigneusement le résultat suivant :

Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(N) = 0 \iff \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $N = [A, B]$.

Procédons par double implication :

- ☞ **Sens direct ($\Longrightarrow$) :** C'est la propriété démontrée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ aux questions 5 à 15 (propriété $(\mathcal{P}_n)$). Tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle s'écrit comme un crochet de Lie.
- ☞ **Sens réciproque ($\Longleftarrow$) :** C'est le résultat direct de la question 4 : si $N = [A, B]$, alors $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$.

L'équivalence est ainsi pleinement établie.

(7) **Justifions que $\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$ est un $\mathbb{K}$-sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Et précisons sa dimension.**

D'après la question 2 et l'équivalence démontrée à la question 16, on a :

$$\begin{aligned} \bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A) &= \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (A, B), N = [A, B]\} \\ &= \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(N) = 0\} \\ &= \ker(\mathrm{Tr}). \end{aligned}$$

La trace $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle (car $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$). Par le théorème du rang, son noyau $\ker(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Par conséquent :

- ☞ $\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)$ est bien un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ☞ Sa dimension est donnée par :

$$\dim\left(\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}(\Phi_A)\right) = \dim(\ker(\mathrm{Tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - 1 = n^2 - 1.$$

FiN