# TD : Réduction (Extraits Oraux)

*Source : https://beos.prepas.org/*

## Partie A : CCINP Banque 2027

### Énoncé exercice 67

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c$ sont des réels.

$M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? $M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

### Énoncé exercice 68

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A$ est diagonalisable de trois manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en déterminant le polynôme caractéristique et la dimension des sous-espaces propres.
   (c) en calculant $A^2$.
2. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.

### Énoncé exercice 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a$ est un réel.

1. Déterminer le rang de $A$.
2. Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

### Énoncé exercice 70

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où $I_3$ désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question **1.** les éléments propres de $B$.

### Énoncé exercice 72

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où $v$ est un vecteur donné de $E$.

1. Donner le rang de $f$.
2. $f$ est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur $v$)

### Énoncé exercice 73

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$ est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

# EXERCICE 74 algèbre

## Énoncé exercice 74

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que $A$ est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $A$ puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$

   $x, y, z$ désignant trois fonctions de la variable $t$,
   dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

## Énoncé exercice 75

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A$ n'est pas diagonalisable.
2. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A$.
   Trouver une base $(v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

# Partie B : CCINP Hors Banque 2026

## Exercice 1

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $MM^T = M^T M$ et $M^2 + 2I_2 = 0$

1) Montrer que $M^T M$ est diagonalisable.

2) Montrer que $\mathrm{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$.

3) Montrer que les valeurs propres de $M^T M$ sont positives ou nulles et en déduire le spectre de $M^T M$.

## Exercice 2

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ annulant $A^2$ tel que $P(0) \neq 0$. Soient $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ les racines de $P$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = P(X^2)$.
Que peut-on dire sur $Q$ ? Décomposer $Q$ en facteurs irréductibles.
b) Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $A^2$ est diagonalisable.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $M$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

## Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Rappeler pourquoi l'application trace est une forme linéaire. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

2) Soit $\phi$ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\phi(A) = A - \mathrm{tr}(A) I_n$$

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\mathrm{tr}(\phi(A))$.
b) En déduire les valeurs propres de $\phi$.

3) L'application $\phi$ est-elle diagonalisable ? Déterminer ses sous-espaces propres.

4) Dans le cas où $n = 2$, donner la matrice de $\phi$ dans la base canonique.

## Exercice 4

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que les 2 seuls sous-espaces stables par $u$ sont $\{0_E\}$ et $E$.

1) Que dire du spectre de $u$ ?

2) Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer que $\left(x, u(x), \ldots\ldots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base de $E$.

3) Ecrire la forme de la matrice de $u$ dans cette base.

4) Montrer que la matrice ne dépend pas de $x$.

## Exercice 5

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $f$ l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\bar{z}$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution $z \in \mathbb{C}$ non nulle si et seulement si $|a| = |b|$.
   **Indication** : décomposer $a$, $b$ et $z$ dans la base $(1, i)$.
   On suppose maintenant que $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les valeurs propres de $f$.
   **Indication** : écrire la matrice associée.
3. Déterminer $\alpha$ et $\beta$ tel que $f$ soit diagonalisable.

## Exercice 6

Soit $x$, $y$ et $z$ des nombres complexes non tous nuls. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ telle que $M = L^\top L$.
2. Montrer que $M$ est diagonalisablesi et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.
3. Montrer que, si $M$ n'est pas diagonalisable, alors elle est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $M^p$.

## Exercice 7

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1) Pour quelles valeurs de $a$ a-t-on : $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ?
Et pour quels $a$ a-t-on $M$ diagonalisable ?

2) Diagonaliser $M$ en fonction de $a$.

3) Montrer que si $a = 1$, alors $M$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

## Exercice 8

Soient $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^*)^2$ et $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$\begin{cases} I_n = A + B \\ M = \lambda A + \mu B \\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B \end{cases}$$

1) $M$ est-elle inversible ? Donner $M^{-1}$ (Indication : calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_n$).

2) Montrer que $A$ et $B$ sont des projecteurs.

3) $M$ est-elle diagonalisable ? Donner $\mathrm{sp}(M)$.

## Exercice 9

1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $B = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix}$

3) Exprimer $\chi_B$ en fonction de $\chi_M$ et $\chi_M(-X)$.

4) Justifier si ces équivalences sont vraies :
a) $M$ inversible ssi $B$ inversible
b) $M$ trigonalisable ssi $B$ trigonalisable
c) $M$ diagonalisable ssi $B$ diagonalisable

## Exercice 10

Soit $\phi$ l'application définie par

$$\phi(P) = (X^2+1)P - (X^2-1)P', \qquad P \in \mathbb{R}[X].$$

1) Montrer que $\phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $P$ un polynôme propre de $\phi$. Montrer que $\deg(P) = n$, que l'on déterminera.

3) Déterminer les éléments propres de $\phi$.

## Exercice 11

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$.

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est un \textbf{vecteur cyclique} de $f$ si la famille

$\mathcal{B}_u = (u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est libre.

1) On suppose dans cette question uniquement que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Justifier l'existence d'un tel vecteur $u$.

2) Soit $u$ un vecteur cyclique de $f$.

a) Justifier que $\mathcal{B}_u$ est une base de $E$.

b) Montrer, à l'aide de la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}_u$, que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \leq n-1$$

c) En déduire que si $f$ est diagonalisable, alors ses valeurs propres sont toutes simples.

3) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $f$, et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs propres associés respectifs. En considérant le vecteur

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

## Exercice 12

Soit u un endormorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $u^3 = u$, $\mathrm{Tr}\, u = 0$ et $\mathrm{Tr}\, u^2 = 2n$.

On définit : $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) \ / \ u \circ v = v \circ u\}$.

**1)** $u$ est-il diagonalisable ?

**2)** Déterminer les valeurs propres de $u$ et les dimensions des sous espaces propres associés. Donner la matrice de $u$ dans une base adaptée à sa diagonalisation.

**3)** Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

4) Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$ ?

# Partie C : Mines-Télécom 2026

## Exercice 1

On note $B$ la matrice ne contenant que des 1 sauf sur la diagonale qui contient des 0.

1. Montrer que $B$ est diagonalisable

2. Déterminer les éléments propres de $B$

3. Montrer que $B$ est inversible et déterminer $B^{-1}$ à l'aide d'un polynôme anulateur de $B$ de degré 2.

## Exercice 2

On pose pour $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(R)$, $f : M \mapsto tr(M)A - tr(A)M$

1. Calculer $f \circ f$

2. $f$ est-elle diagonalisable ?

3. Donner la dimension de sous-espaces propres.

## Exercice 3

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est également diagonalisable.

## Exercice 4

Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

## Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 + A + I_n = 0$.

1) Montrer que $n$ est pair.

2) Calculer $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$.

## Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On considère la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}_c$ :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $f$ est diagonalisable.

2) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

3) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par $f$.

4) On note $g = f_{|\mathrm{Im}(f)}$ l'endomorphisme induit par $f$ sur $\mathrm{Im}(f)$. Donner la matrice de $g$ dans une base choisie.

5) Déterminer le spectre de $g$.

6) Déterminer le spectre de $f$.

## Exercice 7

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

Montrer que $\det A > 0$.

## Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $MM^TMM^TM = I_n$.

## Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = I_2$.

1) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2) Montrer que $A^{12} = I_2$.

## Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{tr}(A^k) = 0$$

1) Que dire de $\chi_A(A)$ et de $\mathrm{tr}(A)$ ? Montrer que $0 \in \mathrm{sp}(A)$.

2) Montrer que $A$ est nilpotente.

## Exercice 11

On pose la matrice suivante dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & c & d & e \\ 0 & \alpha & f & g \\ 0 & 0 & \beta & h \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $\alpha, \beta$ pour que la matrice $T$ soit diagonalisable.

## Exercice 12

Soit l'équation matricielle :

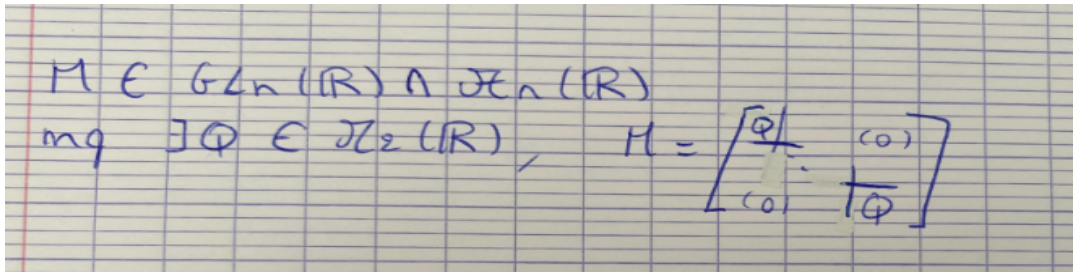
$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que dans tous les cas, $M$ est diagonalisable.

2) Trouver une solution à cette équation.

## Partie D : Mines-Ponts 2026

### Exercice 1




### Exercice 2

1) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$.

2) Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k C = B^k D$$

Montrer que $C = D$.

### Exercice 3

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites bornées sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ tel que $\forall U \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$,

$$T(U) = T\left((u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $T$.

2) Soit $S$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ stable par $T$ (c'est-à-dire $T(S) \subset S$). On note $\widetilde{T}$ l'endomorphisme induit sur $S$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\widetilde{T})$. Montrer que la suite $\left(\ker(\widetilde{T} - \lambda \mathrm{Id})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire pour $n \geq 1$, c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 1, \quad \ker\left((\widetilde{T} - \lambda \mathrm{Id})^n\right) = \ker(\widetilde{T} - \lambda \mathrm{Id})$$

3) En déduire l'existence de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ deux à deux distincts tels que :

$$S = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(\widetilde{T} - \lambda_i \mathrm{Id})$$

### Exercice 4

Soient $A, M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont diagonalisables.

2. Montrer que $MN$ et $NM$ ont les mêmes valeurs propres et que pour $\lambda$ valeur propre non nul, la dimension de leurs sous espaces propres associés à $\lambda$ est identique.

3. En déduire que ${}^tAA$ et $A{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres et même multiplicité. Montrer l'existence de $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAA = {}^tU{}^tAAU$.

### Exercice 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que son polynome minimal est $\mu_A = (X - \lambda)^k$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \in \{1, .., n\}$.

Déterminez tous les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ telle que $Q(A)$ soit diagonalisable.

### Exercice 6

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$AB - BA = B$$

Montrer que $B$ est nilpotente.

2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soient $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$AB - BA = \alpha A + \mu B.$$

Montrer que $A$ et $B$ ont un vecteur propre commun et qu'elles sont simultanément trigonalisables.

FiN