

TD : Algèbre Linéaire

Partie A : Polynômes

Exercice 1 : Déterminant de Van Der Monde vs. Polynômes

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres (réels ou complexes).
On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \det \left((x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \right)$. $P(X) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, X)$.

- ① Justifier que $V(a_1, \dots, a_n) = 0$, quand $\exists 1 \leq i \neq j \leq n$ tel que $a_i = a_j$.
On suppose dans la suite que $\forall i \neq j$, on a $a_i \neq a_j$.
- ② Justifier que $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et déterminer son coefficient dominant.
- ③ Calculer $P(a_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.
- ④ Trouver les racines de P . En déduire que P est scindé à racines simples.
- ⑤ En déduire la décomposition de $P(X)$ en facteur irréductibles.
- ⑥ En déduire une relation reliant $V(a_1, \dots, a_n)$ et $V(a_1, \dots, a_{n-1})$.
- ⑦ En déduire la formule $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.
- ⑧ En déduire une CNS pour que la matrice de Van Der Monde soit inversible.



Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796). Grand violoniste français, il ne commence à s'intéresser aux mathématiques qu'à l'âge de 35 ans. Sa carrière mathématique ne dure que deux ans (1771–1772) et se résume à quatre résultats uniques

Exercice 2 : Principe d'interpolation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts dans $I = [a, b]$.
On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

① Le Polynôme d'interpolation.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_n(a_k) = f(a_k).$$

On dit que le polynôme P_n interpole la fonction f aux points $a_1, \dots, a_n$.

✎ Expliciter P_n à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange $L_k(X)$.

② L'Erreur d'interpolation.

Soit $x \in I \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. On pose $Q(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$.

On considère la fonction définie pour tout $t \in I$ par :

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - A \cdot Q(t) \text{ où } A = \frac{f(x) - P_n(x)}{Q(x)}$$

a Vérifier que $g(x) = 0$ et que $g(a_k) = 0$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

b En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{k=1}^n (x - a_k)$.

✎ **Indication :** Pensez à utiliser le théorème de Rolle itéré (ou successif)
Pour toute fonction $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, on pose $\|h\|_\infty = \sup_{x \in I} |h(x)|$.

c Justifier que $\|f - P_n\|_\infty$ et $\|f^{(n)}\|_\infty$ sont bien définies.

d Vérifier que $\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty$.

e Que peut-on conclure si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I vérifiant la condition :
 $\exists M > 0$, tel que $\|f^{(n)}\|_\infty \leq M$.

f Quel théorème général a-t-on démontré ici dans ce cas particulier.

Exercice 3 : Opérateur des différences finies

On pose : $\Delta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$
 $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$

- ① Que vaut $\Delta(P)$ si P est un polynôme constant.
- ② Montrer que Δ est linéaire. Déterminer $\ker \Delta$.
- ③ Montrer que $\deg \Delta P = \deg P - 1$, pour tout polynôme P non constant. Exprimer dans ce cas $\text{cd}(\Delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.
- ④ Montrer que $\deg \Delta^k(P) = \deg P - k$, pour tout P non constant tq. $k \leq \deg P$. Exprimer dans ce cas $\text{cd}(\Delta^k(P))$ en fonction de $\deg(P)$, k et $\text{cd}(P)$.
- ⑤ Que deviennent ces formules pour $k = \deg P$ et $k > \deg P$.
- ⑥ En réduire que $\Delta^{n+1}P = 0 \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X]$.
On rappelle que : $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \dots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$ et que $\Delta^0(P) = P$.
- ⑦ En déduire que l'application $\Delta_n : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est bien définie, linéaire, surjective et non injective et nilpotente d'indice $n+1$.
- ⑧ En déduire que l'application $\Delta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ est surjective et non injective. Est elle nilpotente.
- ⑨ Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k).$$

 **Indication** : On pourra utiliser $\Delta = T - \text{Id}$ où $T(P(X)) = P(X+1)$.
- ⑩ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que :
 $P(n) \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ si et seulement $(\Delta^k P)(0) \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Opérateur des différences finies vs. Polynômes Factoriels.

On pose
$$\begin{cases} N_0(X) = 1 \\ N_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X-i), \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- ① Démontrer que la famille $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ② Vérifier que $\Delta(N_k) = N_{k-1}$, pour tout $k \geq 1$.
- ③ En déduire une formule générale pour $\Delta^n(N_k)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Distinguer les cas $n \leq k$ et $n > k$.
- ④ En déduire que l'application $\Delta_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$
 $P \mapsto \Delta P$
est nilpotente d'indice $n+1$.
- ⑤ Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $P(X) = \sum_{k=0}^n (\Delta^k P)(0) N_k(X)$.
Que représentent les $(\Delta^k P)(0)$ pour le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5 : Polynômes de Tchebechev.

On pose : $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

- ① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\deg T_n = n$ et $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$.
- ② En déduire que $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ③ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
- ④ Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1, 1]$.
- ⑤ En déduire que T_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
- ⑥ Donner sa décomposition en facteurs irréductibles.

Exercice 6 : Polynômes Orthogonaux

Polynômes de Legendre :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$

- ① Justifier que L_n est un polynôme de degré n . Calculer $L_n(1)$.
- ② Déterminer son coefficient dominant ainsi que sa parité.
- ③ **Orthogonalité** : On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$
 - a Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) < n$, on a $\langle L_n, P \rangle = 0$.
 - b En déduire que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$, $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.
 - c Montrer que $\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$.

Polynômes d'Hermite :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$

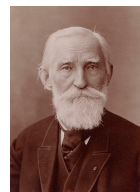
- ① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .
- ② Déterminer son coefficient dominant et sa parité.
- ③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ (pour $n \geq 1$).
- ④ Établir la relation de récurrence d'ordre 2 :
 $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ (avec $H_{-1} = 0$)
- ⑤ En déduire que $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$
- ⑥ **Orthogonalité** :
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$
Montrer que pour tout $n \neq m$, $\langle H_n, H_m \rangle = 0$.
Calculer $\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle$.

Exercice 7 : Polynômes Orthogonaux (suite)

Polynômes de Tchebechev :

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

- ① Montrer que pour tout $n \neq m$, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.
- ② Calculer la norme $\|T_n\|^2 = \langle T_n, T_n \rangle$.



Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894) L'un des plus grands mathématiciens russes, célèbre pour ses contributions fondatrices en théorie des nombres, en statistiques et en mécanique.
Une enfance marquée par le handicap : Né dans une famille de la petite noblesse russe, il souffre dès l'enfance d'une claudication (boiterie) due à une maladie ou une malformation

Polynômes de Laguerre : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} (x^n e^{-x})^{(n)}$

- ① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n .
- ② Déterminer son coefficient dominant ainsi que sa valeur en 0, $L_n(0)$.
- ③ Calculer $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$.
- ④ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$
- ⑤ Établir la relation : $L'_n(x) = L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)$.
- ⑥ En déduire que : $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$
- ⑦ **Orthogonalité**

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$

- a Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.
- b Calculer la norme $\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n \rangle$.

Exercice 8 : Polynômes de Bernstein

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on définit le k -ième polynôme de Bernstein de degré n par : $B_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$

- ① Montrer que $(B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n})$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ② Calculer les sommes $\sum_{k=0}^n B_{k,n}(X)$, $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} B_{k,n}(X)$ et $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 B_{k,n}(X)$.
- ③ En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{k,n}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$

Dans la suite, à tout $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on associe à f le polynôme :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}(X)$$

- ④ Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$, tel que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$,
on a : $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- ⑤ En déduire que $\sum_{k \in I} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{k,n}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$,
où $I = \{k \in [0, n], \text{ tel que } \left| \frac{k}{n} - x \right| < \alpha\}$.
- ⑥ Montrer que $\sum_{k \in J} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{k,n}(x) < \frac{\|f\|_{\infty, [0, 1]}}{2n\alpha^2}$,
où $J = \{k \in [0, n], \text{ tel que } \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \alpha\}$.
- ⑦ En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n(f)\|_{\infty, [0, 1]} = 0$
- ⑧ Quel théorème du cours très connu, a-t-on démontré ici.

Partie B : EV & Applications Linéaires

Exercice 9 : Distributivité des sev

Soient F, G, H, K trois sous-espaces d'un espace vectoriel E .

- ① Montrer que : $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.
- ② Montrer que si $F \cap G = H \cap K$ alors $(F + (G \cap H)) \cap (F + (G \cap K)) = F$.
- ③ On suppose que $F + G = E$. On suppose qu'il existe H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G . Montrer que : $E = F \oplus H$.

Exercice 10 : Union de sev

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev non nul. Soit $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ famille de sev stricts de E , i.e. $F_i \neq E, \forall i \in [1, n]$
On se propose de montrer par récurrence sur $n \geq 2$, que $\mathcal{P}_n : E \neq F_1 \cup \dots \cup F_n$.

- ① Montrer que si $F_1 \cup F_2$ est un sev de E , alors $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.
- ② En déduire que $\mathcal{P}_2$ est vrai. On suppose dans la suite que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vrai.
- ③ Montrer que $\mathcal{P}_n$ est vrai si on suppose $F_n \subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$.
- ④ on suppose dans ce question que $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$
 - a Justifier l'existence de $x \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et de $y \in E \setminus F_n$.
 - b Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \notin F_n$.
 - c Montrer que : $\forall i \leq n-1$, il existe au plus un $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_i x + y \in F_i$.
 - d Rappeler et justifier le lemme des tiroirs. En déduire une contradiction, puis conclure.
- ⑤ Démontrer le résultat suivant : (**Théorème d'évitement des sev**) :
Si $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ famille de sev de E . Si $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est aussi un sev de E ,
alors $\exists j \in [1, n]$, tel que $F_i \subset F_j$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exercice 11 : Exemples de familles libres infinies

Sous réserve que ses éléments soient deux à deux distinctes, montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, quand : $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$, $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$.

Exercice 12 : Résultats simples mais très utiles

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et f, g deux endomorphismes de E . Montrer que : $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g$, $\ker f \subset \ker g \circ f$ et que $g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \ker g$.

Exercice 13 : Noyaux et Images itérés (Classic CNC-CCINP)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

① Étude des inclusions et de la stationnarité.

- a** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$
- b** Justifier qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}$, appelé **indice de stagnation** (ou indice de f), tel que : $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$
- c** Montrer que $p \leq n$.
- d** Démontrer que pour tout $k \geq p$: $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ et $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$

② Décomposition en somme directe.

- a** Montrer que $\ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0_E\}$.
- b** En déduire que : $E = \ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p)$

③ Propriétés des restrictions.

On pose $F = \ker(f^p)$ et $G = \text{Im}(f^p)$.

- a** Montrer que F et G sont stables par f .
- b** Montrer que $f|_F \in \mathcal{L}(F)$ est nilpotent d'indice p .
- c** Montrer que $f|_G \in \mathcal{L}(G)$ est un automorphisme de G .

Exercice 14 : Noyaux et Images itérés (Classic Mines détaillé)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

① Étude des sauts de dimension des noyaux.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = u_{k+1} - u_k = \dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k)$.

- a** Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application f induit un morphisme d'espaces vectoriels : $\tilde{f} : \ker(f^{k+2}) \longrightarrow \ker(f^{k+1})$
- b** Déterminer le noyau $\ker(\tilde{f})$ ainsi que l'image $\text{Im}(\tilde{f})$.
- c** En utilisant le théorème du rang appliqué à $\tilde{f}$, démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $d_{k+1} \leq d_k$

② Conséquences sur la suite des images itérées.

- a** Exprimer $\dim \text{Im}(f^k) - \dim \text{Im}(f^{k+1})$ en fonction de d_k .
- b** En déduire que la suite $(v_k - v_{k+1})_{k \geq 0}$ est décroissante, où $v_k = \dim \text{Im}(f^k)$.
- c** Montrer que si $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$, alors : $\dim \ker(f) \geq \frac{n}{p}$

③ Interprétation géométrique.

Montrer pour tout $k \geq 1$ que : $u_{k+1} - u_k \leq u_k - u_{k-1} \iff u_{k+1} + u_{k-1} \leq 2u_k$

- ④** On suppose que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\dim \ker(f^k) = k$. Montrer que f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à n .
- ⑤** On suppose dans cette question que f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à n .
 - a** Justifier que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a $\dim \ker(f^{k+1}) - \dim \ker(f^k) \neq 0$.
 - b** En déduire que tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\dim \ker(f^k) \geq k$.
 - c** Montrer par récurrence descendante sur $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $\dim \ker(f^k) = k$.
- ⑥** Conclure une caractérisation des endomorphismes nilpotent d'indice n .

Exercice 15 : CNS pour que Im et Ker soient supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E .

- ① Montrer que : $\text{Im}(f) \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$.
- ② Montrer que : $E = \text{Im}(f) + \ker f \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
- ③ Donner une CNS sur f pour que : $E = \text{Im}(f) \oplus \ker f$.

Exercice 16 : Exercices Application du Cours

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$

- ① Montrer que : $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \text{Im}(f)$
- ② On suppose dans cette question que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
 - a Montrer que $E = \ker f \oplus \text{Im}(g)$.
 - b Montrer que $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$.
- ③ On suppose que $f^2 = 0$, $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$. Montrer que $\ker(f) = \text{Im}(f)$.
- ④ Réciproquement, on suppose que $\ker(f) = \text{Im}(f)$, et soit F un supplémentaire de $\ker(f)$. Montrer que :
 - a $f^2 = 0$ et que $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F^2 \mid x = y + f(z)$.
 - b Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$.

Exercice 17 : Commutant de projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et p un projecteur de E .

- ① Montrer que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$.
- ② Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $u \circ p = p \circ u \iff \ker p$ et Im sont stables par u .

Exercice 18 : Projecteurs (Qlq propriétés Classiques)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et p, q deux projecteurs de E .

- ① On suppose que $\ker p = \ker q$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.
Montrer que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est un projecteur, donner son noyau et image.
- ② Montrer que : $p \circ q = q \iff \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$.
- ③ Montrer que : $p + q$ est un projecteur $\iff p \circ q = 0, q \circ p = 0$,
et que dans ce cas : $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}, \ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$
- ④ Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \text{id}_E$. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et que : $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ et $\ker(g \circ f) = \ker(f)$.

Exercice 19 : Lemme de Schur (Classic CNC-CCINP)

- ① Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $(x, f(x))$ est liée $\forall x \in E$.
 - a Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.
 - b Montrer que $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$, on a : $\lambda_x = \lambda_y$.
✎ Indication : On pourra étudier les cas : $\{x, y\}$ libre et $\{x, y\}$ liée.
 - c En déduire que f est une homothétie de E , i.e : $f = \lambda \text{Id}_E$.
- ② On suppose dans la suite que E est de dimension finie, et que $\dim E \geq 2$.
On pose $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}(E)) = \{f \in \mathcal{GL}(E) \mid f \circ g = g \circ f, \forall g \in \mathcal{GL}(E)\}$.
- ③ On suppose que $\exists f \in \mathcal{GL}(E)$ tq. f n'est pas une homothétie.
 - a Justifier l'existence de $x \in E$ tel que $(x_0, f(x_0))$ est libre.
 - b En déduire l'existence d'une base de E contenant $(x_0, f(x_0))$.
 - c En déduire l'existence d'un sev G tq. $E = F \oplus G$, où $F = \mathbb{K}.x_0$.
 - d Trouver une contradiction en considérant $g = s_{F \parallel G}$
 - e En déduire que $\mathcal{Z}(\mathcal{GL}(E)) = \{f = \lambda \text{Id}_E \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
 - f En déduire que $\mathcal{Z}(\mathcal{L}(E)) = \{f = \lambda \text{Id}_E \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 20 : Applications Directes de la formule du rang

Soient E, F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies

- ① soit $u, v : E \rightarrow F$ linéaires.
 - a Montrer que $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
 - b En déduire que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
 - c Montrer que $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\} \implies \ker(u + v) = \ker u \cap \ker v$.
 - d Montrer qu'il y a égalité ssi $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$ et $\ker(u) + \ker(v) = E$.
 - e En déduire que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.
 - f Discuter les cas d'égalité.
- ② Soient $u, v : E \rightarrow F$ linéaires telles que : $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) = \ker u + \ker v = E$.
Montrer que les deux sommes sont directes.
- ③ Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $f \circ g = 0$, $f + g \in GL(E)$.
Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$.
- ④ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$.
 - a Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.
 - b Montrer que $2\text{rg}(f^2) \leq \text{rg}(f)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f|_{\text{Im}(f)}$.
- ⑤ Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir que :
 - a $\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker(f) + \dim \ker(g)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f|_{\text{Im}(g)}$.
 - b $\dim(\text{Im}(f) \cap \ker(g)) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $g|_{\text{Im}(f)}$.
 - c $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim E \leq \text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Partie C : Matrices

Exercice 21 : Matrice de Van Der Monde

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ famille de nombres réels. On pose $A = (a_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ① Dire pourquoi A est non inversible si $\exists i \neq j$ tel que $a_i = a_j$.
- ② On suppose dans suite les a_i deux à deux distincts.
 Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = 0$.
 - a Montrer que $AX = 0 \Leftrightarrow P(a_i) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$,
où $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ à déterminer.
 - b En déduire que $P = 0$, puis que $X = 0$, puis que A est inversible.

Exercice 22 : Matrice de Lehmer

Soit $A = \left(\frac{1}{(i+j-1)!} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = 0$.

On pose $P(t) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(n+k-1)!} t^{k-1}$ et $f(t) = t^n P(t)$.

- ① Calculer $f^{(p)}(1)$, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- ② En déduire que $P^{(p)}(1) = 0$, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- ③ En déduire que $P = 0$, puis que $X = 0$, puis que A est inversible.

Exercice 23 : Matrices vs. Dénombrement (Classic Oral Mines Telecom)

① Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{0-0} \binom{0}{0} & (-1)^{1-0} \binom{1}{0} & \cdots & (-1)^{n-0} \binom{n}{0} \\ 0 & (-1)^{1-1} \binom{1}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-n} \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

🔑 **Indication** : On pourra considérer l'application linéaire $\phi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$
 $P(X) \mapsto P(X+1)$

② **Formule d'inversion de Mobius**

Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ deux familles de nombres réels vérifiant la formule suivante : $y_i = \sum_{j=0}^i \binom{j}{i} x_j$, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Montrer alors que : $x_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{j}{i} y_j$, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

③ **Application** : Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On note $S(p, n)$ le nombre d'applications surjectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a Que vaut $S(p, n)$ si $p < n$? Que vaut $S(n, n)$?

b Montrer que : $n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$, puis que $S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$

Exercice 24 : Matrices vs. Dénombrement (Classic Oral Mines Telecom)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

🔑 On appelle **dérangement** toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans aucun point fixe, i.e : $\sigma(i) \neq i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

🔑 On note D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$, avec la convention $D_0 = 1$.

① Justifier que : $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k}$

② En déduire que : $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

③ **Application : Lemme des chapeaux.**

Lors d'une soirée Prépas, n élèves laissent leur chapeau à la rentrée.

En sortant, la lumière était éteinte, chaque élève reprend un chapeau totalement au hasard.

On note p_n la probabilité qu'au aucun une élève ne reprend son propre chapeau
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 25 : Matrice de rang 1 (Classic CCINP)

① Soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulles.

a Calculer les coefficients de $X.Y^T$

b En déduire que $\text{rg} X.Y^T = 1$.

② Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg} A = 1$.

a Montrer que $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que $A = X.Y^T$.

b Vérifier que $A^2 = (\text{Tr} A).A$.

c En déduire que $A^k = (\text{Tr} A)^{k-1}.A$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Exercice 26 : Matrice de rang 1 (Classic CCINP)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg}A = 1$.

- ① Montrer que A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
- ② On suppose que $\text{Tr}(A) \neq 0$. À l'aide d'un changement de base, montrer que A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
- ③ On suppose que $\text{Tr}(A) = 0$. Justifier qu'on peut supposer par exemple, $c_2 \neq 0$.
À En déduire que A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 : Matrice de permutation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$.

- ① Montrer que $P_\sigma \cdot P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.
- ② Calculer P_{Id} . En déduire que P_σ est inversible et que $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.
- ③ En déduire que $\mathfrak{S}_n(\mathbb{R}) = \{P_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
- ④ Montrer que pour toute $P_\sigma \in \mathfrak{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(P_\sigma) = \pm 1$.
- ⑤ Montrer qu'en général, on a : $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$, pour toute $P_\sigma \in \mathfrak{S}_n(\mathbb{R})$.

 **Indication** : On pourra considérer d'abord le cas $\sigma = (i \ j)$.

Partie D : Déterminants

Exercice 28 : Déterminant de Van Der Monde vs. Polynômes

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres (réels ou complexes).
On pose $V(a_1, \dots, a_n) = \det \left((x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \right)$. $P(X) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, X)$.

- ① Justifier que $V(a_1, \dots, a_n) = 0$, quand $\exists 1 \leq i \neq j \leq n$ tel que $a_i = a_j$.
On suppose dans la suite que $\forall i \neq j$, on a $a_i \neq a_j$.
- ② Justifier que $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et déterminer son coefficient dominant.
- ③ Calculer $P(a_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. En déduire que P est scindé à racines simples.
- ④ En déduire la décomposition de $P(X)$ en facteur irréductibles.
- ⑤ En déduire une relation reliant $V(a_1, \dots, a_n)$ et $V(a_1, \dots, a_{n-1})$.
- ⑥ En déduire la formule $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Exercice 29 : Déterminant tridiagonale (Classic CCINP)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé. On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}$

- ① Montrer que $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$.
- ② En Déduire Δ_n , quand $a = 2 \cos(\theta)$, $b = c = 1$.

Exercice 30 : Déterminant de Cauchy vs. Fractions Rationnelles (CNC)

☞ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $n \geq 2$. On considère deux familles de réels deux à deux distincts $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ tels que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $x_i + y_j \neq 0$, et les (x_i) .

☞ On pose $C_n = C(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

☞ On pose $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, où $Q(X) = \prod_{j=1}^n (X + y_j)$ et $P(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$.

① Justifier que $F(X)$ est une fraction rationnelle qui s'écrit sous la forme

$$F(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{X + y_j}, \text{ où } \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

② Donner la valeur de λ_n .

③ On note $(C_{1,n}, \dots, C_{n,n})$ les lignes de $C_n = C(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.

a Justifier que $\det(C_{1,n}, \dots, C_{n-1,n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i,n}) = \lambda_n \cdot C_n$.

b Vérifier aussi que $\det(C_{1,n}, \dots, C_{n-1,n}, \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i,n}) = F(x_n) \cdot C_{n-1}$,
où $C_{n-1} = C(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_{n-1})$.

④ Établir la relation de récurrence : $C_n = C_{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \prod_{j=1}^{n-1} (y_n - y_j)}{\prod_{j=1}^n (x_n + y_j) \prod_{i=1}^{n-1} (x_i + y_n)}$

⑤ En l'expression explicite de $C(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.

Exercice 31 : Déterminant de Hilbert vs. Matrice de Gram (CNC)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice de Hilbert $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

① Justifier que : $\det(H_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k!)^2}{(n+k)!}$.

② On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Calculer $\det(\text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}))$,
où $\text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}) = (\langle X^i, X^j \rangle)_{0 \leq i, j \leq n-1}$.

Exercice 32 : Déterminant Toeplitz

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix} \quad D(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & \dots & b+x \\ c+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ c+x & \dots & c+x & a+x \end{vmatrix}$$

① À l'aide d'opérations élémentaires sur lignes et/ou colonnes, justifier l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D(x) = \alpha x + \beta$.

Il est utile de remarquer pour la suite que $\beta = D(a, b, c)$.

② On suppose que $b \neq c$.

a Calculer $D(-b)$ et $D(-c)$.

b En déduire que : $D(a, b, c) = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$

③ On suppose que $b = c$, montrer que : $D(a, b, b) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$

☞ **Indication** : On pourra utiliser $c = b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b + \varepsilon)$, ainsi que la continuité de l'application $A \rightarrow \det(A)$.