TD : Intégration (Extraits Oraux)

Partie A : CCINP Banque 2027

Planche 1

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Partie B : CCINP Hors Banque 2026

Planche 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On définit l'application T telle que :
$\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$,

$$T(f)(x) = (x-1)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (t-1)f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que T est un endomorphisme.

2) Montrer que $T(f)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ pour tout $f \in E$ et calculer $T(f)''$.

3) Calculer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$ pour tout $f \in E$.

4) On note G l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ qui s'annulent en 0 et en 1. Montrer que $\mathrm{Im}(T) = G$.

5) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

6) Déterminer les éléments propres de T.

Partie C : Mines-Telecom 2026

Planche 3

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer f'.

2) Déterminer $\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

Planche 4

Calculer $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$

Planche 5

Soit $I_n = \int_0^1 t^n/(1+t)dt$

1) Calculer I_0, I_1

2) Calculer la limite de la suite $(I_n)_n$

3) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}

4) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n.

Planche 6

1. Existence de $\int_0^{+\infty} \ln(\tanh x)\,dx$.
2. Calcul de cette intégrale.

Planche 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ converge et calculer sa valeur.

Planche 8

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$.

1) Montrer que I_n est bien définie.

2) Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx$.

Indication de l'exercice : on pourra utiliser pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ que $\sin(x) \geq \frac{x}{2}$.

Planche 9

Calculer $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$

Planche 10

Ex2 : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2n^2)}\,dx$$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Trouver la limite de (I_n).
3. Déterminer un équivalent simple de I_n.

Partie D : Mines-Ponts 2026

Planche 11

1)

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$. On écrit : $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, avec $a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in [\![1,n]\!]$

Calculer :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(e^{it}\right) e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

2)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan complexe d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$. Montrer qu'il existe un point P sur le cercle unité d'affixe z_P tel que :

$\prod_{i=1}^n x_i \geqslant 1$ où $x_i = |z_i - z_P|$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

Planche 12

Etudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{\sqrt{x+sin(x)}} dx$

Planche 13

Soient f, g continues sur $\mathbb{R}_+$ et $g \geq 0$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Soit y solution de $y'' + (1+p(x))y = 0$ avec $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, p' intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty} p(x) = 0$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \geq 0$ et un réel a tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$y^2(x) \leq a + 2\int_0^x |p'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Planche 14

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On pose :

$$g : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

1) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

2) On pose :

$$F : x \mapsto \int_0^x f \quad \text{sur } \mathbb{R}_+$$

Montrer que pour tous $0 < u < v$, on a :

$$\int_u^v g^2 \leq \frac{F(u)}{u} + 2\sqrt{\int_u^v f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_u^v g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

3) En déduire que g^2 est intégrable et que :

$$\int_0^{+\infty} g^2 \leq 4\int_0^{+\infty} f^2$$

4) La constante 4 est-elle optimale ?

Planche 15

Soient f, g continues sur $\mathbb{R}_+$ et $g \geq 0$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Soit y solution de $y'' + (1 + p(x))y = 0$ avec $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, p' intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty} p(x) = 0$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \geq 0$ et un réel a tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$y^2(x) \leq a + 2\int_0^x |p'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

FiN