# TD : Intégration sur un Segment

## Exercice 1 : Calcul de Primitives (les Classics)

**1 Primitive d'une fraction en $(at^2+bt+c)^\alpha$.**

- ☞ **Méthode** : Écrire $at^2+bt+c$ sous l'une des formes canoniques suivantes
  - ☞ $A(u^2-1)$ avec $A \geqslant 0$, puis intégrer, et si ça bloque utiliser le changement de variable $u = \mathrm{ch}\theta$.
  - ☞ $A(u^2+1)$ avec $A \geqslant 0$, puis intégrer, et si ça bloque le changement de variable $u = \mathrm{sh}\theta$.
  - ☞ $A(1-u^2)$ avec $A \geqslant 0$, puis intégrer, et si ça bloque utiliser le changement de variable $u = \sin\theta$ ou bien $u = \cos\theta$.
  - ☞ $u^2$ avec $A \geqslant 0$, puis intégrer.
- ☞ **Exemple 1** : Donner une primitive de $F(t) = \dfrac{t+1}{(t^2+t+1)^2}$.
- ☞ **Exemple 2** : Donner une primitive de $F(t) = \sqrt{-t^2+2t+1}$.

**2 Primitive d'une fraction rationnelle.**

- ☞ **Méthode** : Décomposer la fraction en éléments simple dans $\mathbb{R}$ sous la forme $F(t) = \sum_{\text{fini}} \dfrac{\lambda}{(t-\omega)^\delta} + \sum_{\text{fini}} \dfrac{\alpha.t+\beta}{(at^2+bt+c)^\gamma}$. Puis intégrer.
- ☞ **Exemple 1** : Donner une primitive de $F(t) = \dfrac{1}{(t^2-1)^2}$.
- ☞ **Exemple 2** : Donner une primitive de $F(t) = \dfrac{1}{(t-1)(t^2+t+1)^2}$.

## Exercice 2 : Calcul de Primitives (Règles de Bioche)

**1 Primitive d'une fraction en $\cos(t)$ et/ou $\sin(t)$.**

- ☞ **Méthode** : Utiliser le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
  Ainsi que les formules suivantes :
  $\mathrm{dt} = \dfrac{2.\mathrm{du}}{1+u^2}$, $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.
- ☞ **Exemple 1** : Donner une primitive de $F(t) = \dfrac{1}{1+\cos(t)}$.
- ☞ **Exemple 2** : Donner une primitive de $F(t) = \dfrac{1+\sin(t)}{1+\cos(t)}$.

**2 Primitive d'une fraction en $\mathrm{ch}(t)$ et/ou $\mathrm{sh}(t)$.**

- ☞ **Méthode** : Utiliser le changement de variable $u = \mathrm{th}\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
  Ainsi que les formules suivantes :
  $\mathrm{dt} = \dfrac{2.\mathrm{du}}{1-u^2}$, $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{1+u^2}{1-u^2}$ et $\mathrm{sh}(t) = \dfrac{2u}{1-u^2}$.
- ☞ **Exemple 1** : Donner une primitive de $F(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)+1}$.
- ☞ **Exemple 2** : Donner une primitive de $F(t) = \dfrac{\mathrm{sh}(t)+1}{\mathrm{ch}(t)+1}$.



**Charles Bioche (1859–1949)** :
Mathématicien français, Normalien et Agrégé de mathématiques. Professeur aux CPGE Louis-le-Grand pendant pendant trente ans. Ses travaux de recherche ont principalement porté sur la géométrie, ainsi que sur l'histoire et l'enseignement des mathématiques.

## Exercice 3 : Calcul de Primitives (Avec Solutions)

**1** **Fractions rationnelles.**

| La fonction | Sa primitive |
|---|---|
| $\dfrac{1}{x^3-1}$ | $\dfrac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert - \dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1)$ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ |
| $\dfrac{1}{(x^3-1)^2}$ | $-\dfrac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert + \dfrac{1}{9}\ln(x^2+x+1)$ $+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{x}{3(x^3-1)}$ |

**2** **Fonctions trigonométriques.**

| La fonction | Sa primitive |
|---|---|
| $\dfrac{1}{\sin x \sin 4x}$ | $-\dfrac{1}{4\sin x}+\dfrac{1}{8}\ln\left\lvert\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right\rvert$ $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\dfrac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right\rvert$ |
| $\dfrac{\tan x}{1+\tan x}$ | $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\lvert\cos x+\sin x\rvert$ |
| $\cos x\sqrt{\cos 2x}$ | $\dfrac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$ |
| $\dfrac{1}{\sin x+\sin 2x}$ | $\dfrac{1}{6}\ln(1-\cos x)+\dfrac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\dfrac{2}{3}\ln\lvert 1+2\cos x\rvert$ |

**3** **Radicaux.**

| La fonction | Sa primitive |
|---|---|
| $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ | $\sqrt{x^2-3x+2}$ $+\dfrac{5}{2}\ln\left\lvert 2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right\rvert$ |
| $\dfrac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$ | $\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-\arccos\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ *poser* $x=1+2\cos\varphi$ |

## Exercice 4 : Primitives successives

Soit $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. On pose :
$F_0(x)=f(x)$ et $F_n(x)=\displaystyle\int_a^x F_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

**1** Montrer que $F_n$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et que $F^{(n)}(x)=f(x)$ pour tout $x\in[a,b]$.

**2** Montrer que que pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $x\in[a,b]$, on a :
$F_n(x)=\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,\mathrm{d}t$.
**Indication** : Formule de Taylor avec reste intégral.

## Exercice 5 : Sommes de Riemann (les Calculs)

Déterminer les limites des suites suivantes quand $n\to+\infty$.

| | |
|---|---|
| $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ | $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right)-n.$ Indication : $x\le e^x-1\le x+\dfrac{ex^2}{2}$, $\forall x\in[0,1]$ |
| $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$ | $\displaystyle\sum_{k=n}^{nm}\frac{1}{k}$, où $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $m\geqslant 2$ |
| $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ | $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. Donner un équivalent simple |
| $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}A_1A_k$ | Où $A_1,A_2,\ldots,A_n$ les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre 0 et rayon 1 |



**Bernhard Riemann (1826–1866)** :
Mathématicien allemand de génie, et étudiant d'un autre génie (Gauss)
Ses travaux portent sur l'analyse, la géométrie et la théorie des nombres.
Mort très jeune de la tuberculose à 39 ans

## Exercice 6 : Sommes de Riemann (Qlq. Applications)

1. **Inégalité de Jensen** : Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux tq $g$ est convexe.
   Démontrer que $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))\,\mathrm{dt}$.
   **Indication** : $g\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k.g(x_k)$, pour tous $x_k \in \mathbb{R}$ et $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$ tel que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$.

2. **Moyenne géométrique** : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux.
   Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{dt}\right)$.
   **Indication** : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout $x \geq -1$.

## Exercice 7 : Formules de la moyenne

**Vocabulaire et Notation** : Si $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, on pose $\langle f\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$, appelée la **moyenne** de $f$ sur le segment $[a,b]$.

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On pose $m(f) = \min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et $M(f) = \max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$.
   a. Dire pourquoi $m(f)$ et $M(f)$ sont bien définis.
   b. Montrer que $\exists c \in [a,b]$ tel que $\langle f\rangle = f(c)$. **Indic** : TVI.

2. Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, avec $f$ positive sur $[a,b]$.
   Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\langle fg\rangle = g(c)\langle f\rangle$.

3. **Application** : Soit $f$ continue au voisinage de 0.
   Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{dt}$.

## Exercice 8 : Intégrales de Wallis (Le Classic Tout Concours)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{dt}$.

1. Vérifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{dt} = w_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n$. **Indic** : IPP.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $w_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Montrer que la suite $(w_n)$ est décroissante.
5. En déduire que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_{n-1}$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $nw_nw_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
7. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
8. En déduire un équivalent simple pour $\binom{2n}{n}$.
9. On pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{dt}$.
   Établir que $I_n = w_{2n+1}$. En déduire un équivalent simple de $I_n$.



**John Wallis (1616-1703)** :
Mathématicien anglais connu pour ses travaux en calcul infinitésimal.

On lui doit surtout le calcul approché de $\pi$.
Et aussi la popularisation du symbole $\infty$

## Exercice 9 : Irrationalité de pi et e

Soit $(p,q,n) \in \mathbb{N}^{*3}$, on pose $P_n(X) = \dfrac{X^n(qX-p)^n}{n!}$.

1. Préciser le degré de $P_n$, ses racines, ainsi que leurs multiplicités.
2. En déduire que $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right)) = 0$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
3. Établir que : $P_n(X) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^j (-p)^{n-j} X^{n+j}$.
4. En déduire que pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, on a :
   $P_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{n!}\binom{k-n}{n} q^{k-n}(-p)^{2n-k}$, puis que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, .
   **Indication** : Formule de Taylor pour les polynômes.
5. Montrer que : $P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$. **Indication** : $P_n\left(\dfrac{p}{q} - X\right) = P_n(X)$.
6. En déduire que $P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$.
7. On suppose dans cette question que $\pi \in \mathbb{Q}$ et on pose $\pi = \dfrac{p}{q}$.
   - **a** Montrer $\displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t \,\mathrm{dt} \in \mathbb{Z}$.
     **Indic** : $(\sin(t))^{(2n)} = (-1)^n \sin(t)$, puis IPP successives.
   - **b** Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{\pi} P_n(t)\sin t \,\mathrm{dt} = 0$.
   - **c** Dire pourquoi que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t)\sin t \,\mathrm{dt}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire en 0.
   - **d** Déduire une contradiction, puis conclure.
8. En raisonnant cette fois sur $\displaystyle\int_0^{e} P_n(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{dt}$, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

## Exercice 10 : Méthodes d'Approximation d'une Intégrale

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- ☞ On pose : $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
- ☞ On pose aussi : $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ **(Sommes de Riemann)**.
- ☞ On sait (résultat de cours) que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$.

1. **Méthode des rectangles à gauche.**
   - **a** Exprimer $R_n(f)$ comme une intégrale d'une fonction à déterminer.
   - **b** Interpréter $R_n(f)$ comme forme géométrique.
   - **c** Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = R_n(f) + \varepsilon_n(f)$, où $\|\varepsilon_n(f)\| \leqslant \dfrac{M_1(b-a)^2}{2n}$, où $M_1(f) = \|f'\|_{\infty,[a,b]} = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.
     **Indication** : IAF sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$.
2. **Méthode des rectangles aux milieux.**
   On pose $R_n^+(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(m_k)$, où $m_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   - **a** Exprimer $R_n^+(f)$ comme une intégrale d'une fonction à déterminer.
   - **b** Interpréter $R_n^+(f)$ comme forme géométrique.
   - **c** Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = R_n^+(f) + \varepsilon_n'(f)$, où $\|\varepsilon_n'(f)\| \leqslant \dfrac{M_2(f)(b-a)^3}{24n^2}$, où $M_2(f) = \|f''\|_{\infty,[a,b]} = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.
     **Indication** : Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur chaque intervalle $[m_k, m_{k+1}]$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   - **d** En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n^+(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$.

## Exercice 11 : Méthodes d'Approximation d'une Intégrale (Suite)

**Méthode des trapèzes** : On reprend les mêmes notations que l'exercice précédent.
On pose $T_n(f) = \dfrac{b-a}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(f(a_k)+f(a_{k+1}))$.

1. Exprimer $T_n(f)$ en fonction de $R_n(f)$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$.
3. Exprimer $T_n(f)$ comme une intégrale d'une fonction à déterminer.
4. Interpréter $T_n(f)$ comme forme géométrique.
5. Montrer que sur chaque segment $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, on a :
$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{dt} - \frac{\beta-\alpha}{2}\big(f(\alpha)+f(\beta)\big) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)f''(t)\,\mathrm{dt}$.
6. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = T_n(f)+\varepsilon_n''(f)$, où $\|\varepsilon_n''(f)\| \leqslant \dfrac{M_2(f)(b-a)^3}{12n^2}$, où $M_2(f) = \|f''\|_{\infty,[a,b]} = \sup\limits_{t\in[a,b]}|f''(t)|$.
7. Comparer la rapidité de convergence de ces trois méthodes.

## Exercice 12 : Le Classic (Tous Concours)

1. Vérifier que pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{k^2}$
2. **Noyau de Dirichlet** :
Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^n\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.
3. **Lemme de Lebesgue** :
Montrer que, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b\varphi(t)\sin(\lambda.t)\,\mathrm{dt} = 0$,
4. Soit la fonction $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ définie par $\begin{aligned} f(t) &= \dfrac{t^2-2\pi t}{4\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)} && \text{si } t\neq 0 \\ &= 0 && \text{si } t=0\end{aligned}$.
Montrer que de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
5. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,\mathrm{dt} = \int_0^\pi\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\varphi(t)\,\mathrm{dt} - \int_0^\pi\left(\frac{t^2-2\pi t}{4\pi}\right)\,\mathrm{dt}$.
6. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge et que
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (**Formule de Gauss**).
7. En déduire les valeurs des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

## Exercice 14 : Extraits Oral CCINP Hors Banque 2026

### Planche 1

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On définit l'application $T$ telle que :
$\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$,

$$T(f)(x) = (x-1)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (t-1)f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que $T$ est un endomorphisme.

2) Montrer que $T(f)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ pour tout $f \in E$ et calculer $T(f)''$.

3) Calculer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$ pour tout $f \in E$.

4) On note $G$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ qui s'annulent en 0 et en 1. Montrer que $\mathrm{Im}(T) = G$.

5) Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

6) Déterminer les éléments propres de $T$.

## Exercice 15 : Extraits Oral Mines-Télécom 2026

### Planche 1

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'$.

2) Déterminer $\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

### Planche 2

Calculer $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$

### Planche 3

Soit $I_n = \int_0^1 t^n/(1+t)dt$

1) Calculer $I_0, I_1$

2) Calculer la limite de la suite $(I_n)_n$

3) Trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$

4) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer $S_n$ en fonction de $I_n$.

## Exercice 16 : Extraits Oral Mines-Ponts 2026

### Planche 1

Soient $f, g$ continues sur $\mathbb{R}_+$ et $g \geq 0$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq A\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Soit $y$ solution de $y'' + (1+p(x))y = 0$ avec $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+), p'$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty} p(x) = 0$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \geq 0$ et un réel $a$ tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$y^2(x) \leq a + 2\int_0^x |p'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que $y$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

FiN