Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Matrices Stochastiques

Notations et définitions

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un entier naturel.

Une matrice $A=(a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{C})$ est dite stochastique ssi

(1) $\forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, $a_{i,j}\in\mathbb{R}^+$,

(2) $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de ces matrices.

Une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite converger vers B matrice de $M_n(\mathbb{C})$ ssi les n^2 suites complexes définies par les coefficients des matrices A_p convergent vers les coefficients respectifs de B.

On montre aisément que si (A_p) et (A'_p) convergent vers B et B' alors les suites $(A_p+A'_p)$ et $(A_pA'_p)$ convergent respectivement vers $B+B'$ et BB'.

Enfin étant donné $A\in M_n(\mathbb{C})$ et $P=a_pX^p+\cdots+a_1X+a_0\in\mathbb{C}[X]$, on note $P(A)$ la matrice définie par $P(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0I_n\in M_n(\mathbb{C})$.

Préliminaire

Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{C})$. On note $X\in M_{n,1}(\mathbb{C})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $AX=X$ ssi $\forall i\in\{1,2\dots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1$.
2. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est stable pour le produit matriciel.

Partie I : Puissance des matrices stochastique d'ordre 2

La forme générale d'une matrice stochastique d'ordre 2 est $A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b\end{pmatrix}$ avec $a,b\in[0,1]$.

1. Calculer A^p dans les cas $a=b=1$ et $a=b=0$.
2. On suppose maintenant $(a,b)\neq(1,1)$ et $(a,b)\neq(0,0)$.

2.a Calculer $P(A)$ où $P=(X-1)(X-(a+b-1))$

2.b Exprimer le reste de la division euclidienne de X^p par P.

2.c En déduire l'expression de A^p en fonction de a,b et p.

2.d Montrer que la suite (A^p) converge vers une limite que l'on précisera.

Partie II : Exemple de calcul de puissances d'une matrice stochastique d'ordre 3

On considère E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 de la forme $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$ avec (U,V).

1. Montrer que E un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$ dont on précisera une base et la dimension.
2. On note $U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $V=I-U$.

2.a Montrer que la famille (U,V) forme une base de E.
Quelles sont les coordonnées de $M(a,b)$ dans cette base ?

2.b Calculer U^2, V^2, UV et VU.

2.c Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ et $p\geq 1$, exprimer $(\alpha U+\beta V)^p$ en fonction de α,β,U,V et p.
En déduire l'expression de $M(a,b)^p$ en fonction de U et V.

3. A quelles conditions sur a et b, une matrice $M(a,b)$ de E appartient-elle à $\mathcal{S}_3$?
On suppose ces conditions remplies.
Montrer que la suite $(M(a,b)^p)$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III : Matrice de permutation

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on note $M_\sigma=(m_{i,j})\in M_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par : $m_{i,j}=\delta_{\sigma(i),j}=\begin{cases}1 & \text{si } j=\sigma(i)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. M_σ est appelée matrice de permutation associée à σ.

1. Justifier que les matrices de permutations sont stochastiques.

2. Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et σ un permutation de $\mathfrak{S}_n$.
Donner le terme général des matrices $B=M_\sigma A$ et $C={A}^t M_\sigma$ en fonction du terme général $a_{i,j}$ de la matrice A. Comment interpréter les résultats obtenus en termes de permutation de lignes ou colonnes.

3. Soit $\sigma,\sigma'\in\mathfrak{S}_n$.Exprimer le produit $M_\sigma.M_{\sigma'}$ comme matrice associée à une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
En déduire que M_σ est inversible et exprimer son inverse.

4. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. A quelle condition la suite (M_σ^p) converge-t-elle ?

Partie IV : Etude générale

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{S}_n$. On s'intéresse ici à l'éventuelle convergence de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A^p.

1. Montrer que si la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B alors $B\in\mathcal{S}_n$ et $B^2=B$.

2. On suppose ici que pour tous $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $a_{i,j}>0$.
On pose $\varepsilon=\min\{a_{i,j}\,/\,i,j\in\{1,2,\ldots,n\}\}$.
Pour tout p dans $\mathbb{N}$ et tout j dans $\{1,2,\ldots,n\}$, on note
$\alpha_j^{(p)}=\min\{a_{i,j}^{(p)}\,/\,i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$, $\beta_j^{(p)}=\max\{a_{i,j}^{(p)}\,/\,i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$ et $\delta_j^{(p)}=\beta_j^{(p)}-\alpha_j^{(p)}$.

2.a Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}$ et tout j dans $\{1,2,\ldots,n\}$, on a :
$\alpha_j^{(p)}\leq\alpha_j^{(p+1)}\leq\beta_j^{(p+1)}\leq\beta_j^{(p)}$ et $\delta_j^{(p+1)}\leq(1-2\varepsilon)\delta_j^{(p)}$.

2.b En déduire que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice B.

2.c Quelle particularité ont les lignes de B ?

Les matrices stochastiques interviennent en calcul de probabilité de la manière suivante :
Considérons un système à n états numérotés de 1 à n et notons $a_{i,j}$ la probabilité pour ce système de passer de l'état i à l'état j au bout d'un laps de temps donné.

La matrice $A=(a_{i,j})$ est alors une matrice stochastique, la condition $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$ signifiant que le système doit atteindre à partir de l'état i l'un des états $1,2,\ldots,n$ donnés. Pour $p\in\mathbb{N}$, les coefficients de la matrices A^p permettent de voir les probabilités qui permettent de passe d'un état à un autre au bout de p laps de temps. La limite de (A^p), lorsqu'elle existe, donne une information sur le processus limite. Dans ce contexte, l'égalité des lignes de B signifie que l'état limite est indépendant de l'état initial.

Correction

Préliminaire

1. AX est une matrice colonne dont le coefficient de la ligne d'indice i est $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

2. Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{S}_n$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{S}_n$. On étudie $AB=(c_{i,j})\in\mathcal{S}_n$ avec $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

   (1) $\forall i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$, on a $a_{i,k}\geq 0$ et $b_{k,j}\geq 0$ donc $c_{i,j}\geq 0$.

   (2) $ABX=AX=X$ donc $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1$.

Partie I

1. Si $a=b=1$ alors $A=I$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$, $A^p=I$.

   Si $a=b=0$ alors $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$, $A^p=\begin{cases}I & \text{si } p \text{ est pair}\\ A & \text{sinon}\end{cases}$.

2.a $P(A)=(A-I)(A-(a+b-1)I)=\begin{pmatrix}a-1&1-a\\1-b&b-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-b&1-a\\1-b&1-a\end{pmatrix}=O$.

2.b Cette division euclidienne s'écrit : $X^p=PQ+R$ avec $\deg R<2$ ce qui permet d'écrire $R=\alpha X+\beta$.
En évaluant cette relation de division euclidienne en 1 et $a+b-1$ qui sont racines de P on obtient :

$$\begin{cases}1=\alpha+\beta\\(a+b-1)^p=\alpha(a+b-1)+\beta\end{cases}\text{ d'où }\begin{cases}\alpha=\dfrac{(a+b-1)^p-1}{a+b-2}\\[2mm]\beta=\dfrac{(a+b-1)-(a+b-1)^p}{a+b-2}\end{cases}.$$

2.c Par la relation de division euclidienne : $A^p=P(A)Q(A)+R(A)$ donc

$$A^p=\alpha A+\beta I=\frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix}(a-1)(a+b-1)^p+b-1 & (1-a)((a+b-1)^p-1)\\(1-b)((a+b-1)^p-1) & (b-1)(a+b-1)^p+a-1\end{pmatrix}.$$

2.d On a $a,b\in\left]0,1\right[$ donc $0<a+b<2$ puis $|a-b-1|<1$ et donc $(a+b-1)^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$.

   Par suite (A^p) converge vers : $\dfrac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix}b-1&a-1\\b-1&a-1\end{pmatrix}$.

Partie II

1. Introduisons $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. On a $E=\operatorname{Vect}(I,J)$ avec I,J linéairement indépendantes donc E est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $M_3(\mathbb{C})$ donc (I,J) est base.

2.a Clairement $U,V\in E$ et (U,V) libre donc (U,V) est base de E car $\dim E=2$.

$$M(a,b)=\lambda U+\mu V\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+2\mu=3a\\\lambda-\mu=3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=a+2b\\\mu=a-b\end{cases}.$$

   Les composantes de $M(a,b)$ dans (U,V) sont $a+2b$ et $a-b$.

2.b $U^2=U$, $V^2=I-2U+U^2=V$, $UV=U-U^2=VU=O$.

2.c Puisque U et V commutent : $(\alpha U+\beta V)^p=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha U)^k(\beta V)^{n-k}$.

   Or pour $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, on a $(\alpha U)^k(\beta V)^{n-k}=0$ car $UV=0$

donc $(\alpha U+\beta V)^p=\alpha^p U^p+\beta V^p=\alpha^p U+\beta^p V$.

$M(a,b)^p=(a+2b)^p U+(a-b)^p V$.

3. $M(a,b)\in\mathcal{S}_3$ ssi $a,b\geq 0$ et $a+2b=1$ (ce qui implique $a\in[0,1]$ et $b\in[0,1/2]$)

Si $b=0$ alors $M(a,b)=I$ et donc $(M(a,b)^p)$ converge vers I .

Si $b>0$ alors

d'une part $(a+2b)^p=1\xrightarrow[p\to+\infty]{}1$

et d'autre part $-1<a-\dfrac{1}{2}<a-b<a\leq 1$ donc $(a-b)^p\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$.

Par suite $(M(a,b)^p)$ converge vers U .

Partie III

1. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$, $m_{i,j}\geq 0$ et $\forall i\in\{1,\dots,n\},\sum_{j=1}^n m_{i,j}=\sum_{j=1}^n\delta_{\sigma(i),j}=1$ donc $M_\sigma\in\mathcal{S}_n$.

2. $B=(b_{i,j})$ avec $b_{i,j}=\sum_{k=1}^n\delta_{\sigma(i),k}a_{k,j}=a_{\sigma(i),j}$.

B est obtenue en permutant les lignes de A selon σ .

$C=(c_{i,j})$ avec $c_{i,j}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)}=a_{i,\sigma(j)}$.

C est obtenue en permutant les colonnes de A selon σ .

3. $M_\sigma M_{\sigma'}=(a_{i,j})$ avec $a_{i,j}=\sum_{k=1}^n\delta_{\sigma(i),k}\delta_{\sigma'(k),j}=\delta_{\sigma(i),\sigma'^{-1}(j)}=\delta_{\sigma'\circ\sigma(i),j}$ donc $M_\sigma M_{\sigma'}=M_{\sigma'\circ\sigma}$.

$M_\sigma M_{\sigma^{-1}}=M_{\sigma^{-1}}M_\sigma=I$ donc M_σ est inversible et $M_{\sigma^{-1}}$ est son inverse.

4. Il est clair que (M_σ^p) converge vers I quand $\sigma=\mathrm{Id}$.

Inversement supposons (M_σ^p) convergente. $M_\sigma^p=M_{\sigma^p}=(\delta_{\sigma^p(i),j})$.

La convergence de M_σ^p implique la convergence des $\delta_{\sigma^p(i),j}$.

Or pour que ces derniers convergent, ils doivent être stationnaires.

Ainsi, pour p suffisamment grand, on a pour tout i,j : $\delta_{\sigma^{p+1}(i),j}=\delta_{\sigma^p(i),j}$.

On a alors pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $\sigma^{p+1}(i)=\sigma^p(i)$ donc $\sigma(i)=i$ car $\sigma^p\in\mathfrak{S}_n$.

Ainsi $\sigma=\mathrm{Id}$

Partie IV

1. Par extraction (A^{2p}) converge vers B .

Or $A^{2p}=A^p\times A^p$ donc par opérations (A^{2p}) converge aussi vers B^2 .

Par unicité de la limite $B=B^2$.

2.a $a_{i,j}^{(p+1)}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{k,j}^{(p)}\geq\sum_{k=1}^n a_{i,k}\alpha_j^{(p)}=\alpha_j^{(p)}$ car $\sum_{k=1}^n a_{i,k}=1$. Par suite $\alpha_j^{(p+1)}\geq\alpha_j^{(p)}$.

$a_{i,j}^{(p+1)}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{k,j}^{(p)}\leq\sum_{k=1}^n a_{i,k}\beta_j^{(p)}=\beta_j^{(p)}$ et donc $\beta_j^{(p+1)}\leq\beta_j^{(p)}$. Enfin il est clair que $\alpha_j^{(p+1)}\leq\beta_j^{(p+1)}$.

Peaufinons :

Notons ℓ l'indice tel que $a_{\ell,k}^{(p)}=\beta_j^{(p)}$.

$$a_{i,j}^{(p+1)}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{k,j}^{(p)}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^n a_{i,k}a_{k,j}^{(p)}+a_{i,\ell}a_{\ell,j}^{(p)}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^n a_{i,k}a_{k,j}^{(p)}+a_{i,\ell}\beta_j^{(p)}$$

donc $a_{i,j}^{(p+1)} \geq \sum_{\substack{k=1\\k\neq \ell}}^{n} a_{i,k}\alpha_j^{(p)} + a_{i,\ell}\beta_j^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\alpha_j^{(p)} + a_{i,\ell}\delta_j^{(p)} \geq \alpha_j^{(p)} + \varepsilon\delta_j^{(p)}$.

Ainsi $\alpha_j^{(p+1)} \geq \varepsilon\delta_j^{(p)} + \alpha_j^{(p)}$.

Une démarche analogue laissée au soin du lecteur attentif donne $\beta_j^{(p+1)} \leq \beta_j^{(p)} - \varepsilon\delta_j^{(p)}$.

Cela permet alors de justifier : $\delta_j^{(p+1)} \leq \beta_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)} - 2\varepsilon\delta_j^{(p)} = (1-2\varepsilon)\delta_j^{(p)}$.

2.b Par récurrence $0 \leq \delta_j^{(p)} \leq (1-2\varepsilon)^p \delta_j^{(0)}$ donc $\delta_j^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Les suites $(\alpha_j^{(p)})$ et $(\beta_j^{(p)})$ sont donc adjacentes. Notons ℓ_j leur limite commune.

Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $\alpha_j^{(p)} \leq a_{i,j}^{(p)} \leq \beta_j^{(p)}$ donc par le théorème des gendarmes $a_{i,j}^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ell_j$.

Par suite (A^p) converge vers une matrice B dont toutes les lignes sont égales à $\begin{pmatrix}\ell_1 & \cdots & \ell_n\end{pmatrix}$.

2.c Elles sont toutes égales.